Ejercicio 1. Sea Σ un alfabeto finito. Decimos que una palabra $w \in \Sigma^*$ se **descompone** en una lista de palabras ℓ si w se escribe reordenando las palabras de ℓ y concatenándolas. Por ejemplo, *abracadabra* se descompone como $[cada, a, bra, bra]$. Observemos que cada palabra de ℓ se debe usar una vez (y solamente una vez).

a) Dado el lenguaje:
$$\mathsf{DESC} = \{\langle w, \ell\rangle \mid w \text{ se descompone en } \ell\}$$
elegir exactamente **una** de las siguientes afirmaciones y demostrarla:

(1) DESC está en la clase P. (2) DESC está en la clase NP. (3) DESC está en la clase NP-hard.

b) Dado un número $k \in \mathbb{N}$ fijo y el siguiente lenguaje:
$$\mathsf{DESC}_k = \{\langle w, \ell\rangle \mid w \text{ se descompone en } \ell, \text{ y además todas las palabras de } \ell \text{ son de longitud } k\}$$
Notamos además $\overline{\mathsf{DESC}}_k$ al complemento de DESC_k. Elegir exactamente **una** de las siguientes afirmaciones y demostrarla:

(1) $\overline{\mathsf{DESC}}_k$ está en la clase P. (2) $\overline{\mathsf{DESC}}_k$ está en la clase NP. (3) $\overline{\mathsf{DESC}}_k$ está en la clase NP-hard.

Ejercicio 2. Sea Σ un alfabeto finito. Decimos que dos palabras $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ se **pegan** si w_1 termina con la misma letra con la que empieza w_2. Más formalmente, w_1 y w_2 se pegan si $w_1 = w_1'\,a$ y $w_2 = a\,w_2'$, donde $w_1', w_2' \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$.

Un conjunto finito X de palabras es **pegable** si X se puede escribir como una lista de la forma $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sin repetidos de tal modo que w_i se pega con w_{i+1} para cada $1 \leq i \leq n-1$. Por ejemplo, el conjunto $\{$*ojos*, *ola*, *arco*$\}$ es pegable porque sus palabras se pueden acomodar de tal modo que cada una se "enganche" con la siguiente a través de la letra que las conecta: *ola_arco_ojos*, mientras que el conjunto $\{$*ojos*, *olas*, *arco*$\}$ no es pegable.

Definimos el lenguaje:
$$\mathsf{PEGABLE} = \{\langle X\rangle \mid X \text{ es un conjunto pegable}\}$$

a) Dar una reducción polinomial $\mathsf{HAMPATH} \leq_P \mathsf{PEGABLE}$.

b) Demostrar que $\mathsf{PEGABLE}$ es NP-completo.

Ejercicio 3. Sea $A \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje no trivial, es decir, A no es el conjunto vacío ni el conjunto de todas las palabras. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y demostrar lo que corresponda en cada caso:

a) Si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ entonces $\mathsf{SAT} \leq_P A$.

b) Si $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ y $\mathsf{SAT} \leq_P A$ entonces $A \in \mathsf{P}$.

c) Si $\mathsf{SAT} \leq_P A$ y $A \in \mathsf{P}$, entonces $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Justificar todas las respuestas.