Teoría de la Computación **Segundo Parcial**

Licenciatura en Informática, Universidad Nacional de Quilmes 1er cuatrimestre de 2021

Ejercicio 1. Dada una matriz de m filas y n columnas, con coeficientes enteros:

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Las *submatrices* de M son todas las matrices de p filas y q columnas, donde $1 \leq p \leq m$ y $1 \leq q \leq n$, con coeficientes de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_{ij} & x_{i(j+1)} & \dots & x_{i(j+q)} \\ x_{(i+1)j} & x_{(i+1)(j+1)} & \dots & x_{(i+1)(j+q)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(i+p)j} & x_{(i+p)(j+1)} & \dots & x_{(i+p)(j+q)} \end{pmatrix}$$

Considerar el siguiente lenguaje:

$$\mathsf{SUBMAT\text{-}SUM} = \{\langle M, k\rangle \mid M \text{ es una matriz de enteros con una submatriz } M' \text{ cuyos coeficientes suman } k\}$$

Al menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera (puede haber varias verdaderas):

1. $\mathsf{SUBMAT\text{-}SUM} \in (\mathsf{P} \cap \mathsf{NP})$, es decir, está en las clases P y NP.
2. $\mathsf{SUBMAT\text{-}SUM} \in (\mathsf{P} \setminus \mathsf{NP})$, es decir, está en la clase P pero no en la clase NP.
3. $\mathsf{SUBMAT\text{-}SUM} \in (\mathsf{NP} \setminus \mathsf{P})$, es decir, está en la clase NP pero no en la clase P.
4. $\mathsf{SUBMAT\text{-}SUM} \notin (\mathsf{P} \cup \mathsf{NP})$, es decir, no está en las clases P ni NP.

Elegir exactamente una de las cuatro afirmaciones y demostrarla.

Ejercicio 2. Sean $A, B \subseteq \Sigma^*$ lenguajes no triviales (es decir, no son vacíos y sus complementos tampoco). Notamos $A\#B$ para la concatenación de A y B con un separador $\#$, es decir:

$$A\#B = \{w_1\#w_2 \mid w_1 \in A, w_2 \in B\}$$

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar:

1. $A \leq_P (A\#B)$
2. Si $A\#B$ es NP entonces A es NP.
3. Si A es NP-completo, entonces $(A\#B) \leq_P A$.
4. Si A es NP-completo y B es NP, entonces $A\#B$ es NP-completo.

Ejercicio 3. Dado un grafo dirigido G y vértices distintos v, w, u, un <u>camino Hamiltoniano de v a w con foco en u</u> es un camino dirigido que empieza en v, termina en w, pasa exactamente **dos** veces por u, y pasa exactamente una vez por todos los demás vértices. Considerar el lenguaje:

$$\mathsf{FHAMPATH} = \{\langle G, v, w, u\rangle \mid G \text{ es un grafo dirigido con un camino Hamiltoniano de } v \text{ a } w \text{ con foco en } u\}$$

Demostrar que $\mathsf{FHAMPATH}$ es NP-completo.

Ejercicio 4. Una cadena de dígitos decimales es *especial* si se pueden insertar operadores (suma, resta y multiplicación) y paréntesis de tal modo que, al evaluarla, el resultado sea 0. Por ejemplo, `10241` es especial porque se pueden insertar operadores y paréntesis del siguiente modo: `10-(2*(4+1))` para que el resultado de evaluar la expresión sea `0`. Una cadena es *súper-especial* si todas sus permutaciones son especiales. Por ejemplo, la cadena `224` es súper-especial, ya que sus tres permutaciones son especiales:

`224` $\mapsto$ `(2-2)*4`   `242` $\mapsto$ `(2-4)+2`   `422` $\mapsto$ `4-(2*2)`

Sea $\mathsf{SE} = \{w \mid w \text{ es una cadena de dígitos decimales súper-especial}\}$. Demostrar que $\mathsf{SE} \in \mathsf{PSPACE}$.

Justificar todas las respuestas.