Práctica 4: Cálculo-λ sin tipos

- Dado un ARS $(A, \to)$, decimos que un objeto $a \in A$ *está en* $\to$*-forma normal* si no existe $b \in A$ tal que $a \to b$.
- Decimos que a *tiene* $\to$*-forma normal* si existe un objeto $b \in A$ tal que $a \twoheadrightarrow b$ y b está en $\to$-forma normal.

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes propiedades del operador de sustitución:

a) Si $x \notin \mathsf{fv}(t)$ entonces $t\{x := s\} = t$.

b) Si $x \notin \mathsf{fv}(u)$ y $y \notin \mathsf{fv}(s)$ entonces $t\{x := s\}\{y := u\} = t\{y := u\}\{x := s\}$.

c) Si $x \notin \mathsf{fv}(u)$ entonces $t\{x := s\}\{y := u\} = t\{y := u\}\{x := s\{y := u\}\}$. Este ítem generaliza al anterior.

d) Dar un ejemplo en el que no valga la igualdad probada en el ítem anterior si se elimina la hipótesis "$x \notin \mathsf{fv}(u)$".

Ejercicio 2. Normalizar el término $S\,S\,S\,S\,S\,S$, donde $S = \lambda x\,y\,z.\,x\,z\,(y\,z)$.

Ejercicio 3. El *grafo de reducción* de un objeto a en un ARS $(A, \to)$ es un grafo dirigido cuyos vértices están dados por el conjunto $\{b \in A \mid a \twoheadrightarrow b\}$ y (b_1, b_2) es una arista si y sólo si $b_1 \to b_2$. Dibujar el grafo de $\to_\beta$-reducción de $(\lambda f.\, f\,(f\,x))(I\,E)$ donde $I = \lambda x.\, x$ y $E = \lambda x.\, z$.

Ejercicio 4. Demostrar que $(\lambda y.\, \lambda x.\, t)\, s =_\beta \lambda x.\, (\lambda y.\, t)\, s$.

Ejercicio 5. Demostrar que si $t =_\beta t'$ y $s =_\beta s'$ entonces $t\{x := s\} =_\beta t'\{x := s'\}$. *Sugerencia:* usar el hecho de que $t\{x := s\} =_\beta (\lambda x.\, t)\, s$.

Ejercicio 6. Demostrar que:

a) Si $t \to_\beta t'$ entonces $\mathsf{fv}(t) \supseteq \mathsf{fv}(t')$.

b) Si $t \to_\beta t'$ entonces $t\{x := s\} \to_\beta t'\{x := s\}$.

c) Si $s \to_\beta s'$ entonces $t\{x := s\} \twoheadrightarrow_\beta t\{x := s'\}$.

Ejercicio 7. El conjunto $\Lambda^I \subseteq \Lambda$ se define inductivamente del siguiente modo:

$$\frac{}{x \in \Lambda^I} \qquad \frac{t \in \Lambda^I \qquad x \in \mathsf{fv}(t)}{\lambda x.\, t \in \Lambda^I} \qquad \frac{t \in \Lambda^I \; s \in \Lambda^I}{t\, s \in \Lambda^I}$$

Dicho de otro modo, un término está en el conjunto Λ^I si las variables ligadas por λ-abstracciones aparecen al menos una vez en el cuerpo. Demostrar que el conjunto Λ^I es cerrado por β-reducción, es decir, que si $t \in \Lambda^I$ y $t \to_\beta s$ entonces $s \in \Lambda^I$. El cálculo-λI es la restricción del cálculo-λ a términos dentro del conjunto Λ^I.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Definir términos $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ y $\pi_i(t)$ de tal modo que para todo $i \in 1..n$ se verifique:

$$\pi_i(\langle t_1, \ldots, t_n \rangle) \twoheadrightarrow_\beta t_i$$

Ejercicio 9. Usando la codificación de números naturales como numerales de Church, $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f\, z.\, f^n\, z$:

1. Definir un término *Succ* tal que $\mathit{Succ}\, \underline{n} \twoheadrightarrow_\beta \underline{n+1}$.
2. Definir un término *Zero*? tal que $\mathit{Zero?}\, \underline{0} \twoheadrightarrow_\beta \mathtt{true} = \lambda x\, y.\, x$ y $\mathit{Zero?}\, (\underline{n+1}) \twoheadrightarrow_\beta \mathtt{false} = \lambda x\, y.\, y$.
3. Definir un término *Add* tal que $\mathit{Add}\, \underline{n}\, \underline{m} \twoheadrightarrow_\beta \underline{n+m}$.
4. Definir un término *Mul* tal que $\mathit{Mul}\, \underline{n}\, \underline{m} \twoheadrightarrow_\beta \underline{n*m}$.
5. Definir un término *Pow* tal que $\mathit{Pow}\, \underline{n}\, \underline{m} \twoheadrightarrow_\beta \underline{n^m}$.
6. Definir un término *Pred* tal que $\mathit{Pred}\, (\underline{n+1}) \twoheadrightarrow_\beta \underline{n}$.

Ejercicio 10. Demostrar que un término $t \in \Lambda$ está en $\to_\beta$-forma normal si y sólo si se puede producir con la siguiente gramática donde $n, k \geq 0$:

$$N ::= \lambda x_1 \dots x_n.\, y\, N_1 \dots N_k$$

Por ejemplo, $\lambda x.\, x\,(y\,y)\,(\lambda z.\, x)$ está en $\to_\beta$-forma normal y se puede producir con la gramática de arriba.

Ejercicio 11. Usando el hecho de que el cálculo-λ_β es confluente, demostrar que si $x\, t_1 \dots t_n =_\beta y\, s_1 \dots s_m$ entonces $x = y$, $n = m$, y $t_i =_\beta s_i$ para todo $i \in 1..n$.

Ejercicio 12. El objetivo de este ejercicio es probar que, si se agregaran ciertas igualdades a la teoría ecuacional del λ_β-cálculo, la teoría dejaría de ser consistente.

a) Asumiendo que $\lambda x.\, \lambda y.\, x =_\beta \lambda x.\, \lambda y.\, y$, probar que $t =_\beta s$ para todo $t, s \in \Lambda$.

b) Asumiendo que $\lambda x.\, x =_\beta \lambda x.\, \lambda y.\, y\, x$ probar que $t =_\beta s$ para todo $t, s \in \Lambda$.

Ejercicio 13. Demostrar que:

a) Si $t\{x := s\}$ está en $\to_\beta$-forma normal entonces t está en $\to_\beta$-forma normal.

b) Si $t\{x := s\}$ tiene $\to_\beta$-forma normal entonces t no necesariamente tiene $\to_\beta$-forma normal.

c) Existen términos $t, s \in \Lambda$ tales que ni t ni s tienen $\to_\beta$-forma normal pero $t\, s$ tiene $\to_\beta$-forma normal.

Ejercicio 14. (Eta reducción) Considerar la siguiente regla de reescritura, conocida como η-reducción:

$$\lambda x.\, t\, x \to_\eta t \qquad \text{si } x \notin \mathsf{fv}(t)$$

Por ejemplo, $\lambda x.\, I\, x \to_\eta I$ pero no vale $\lambda x.\, I\, x\, x \to_\eta I\, x$ porque $x \in \mathsf{fv}(I\, x)$. Igual que en el caso de $\to_\beta$, la relación $\to_\eta$ se clausura por contextos arbitrarios, es decir, si $t \to_\eta t'$ entonces también $t\, s \to_\eta t'\, s$ y $s\, t \to_\eta s\, t'$ y $\lambda x.\, t \to_\eta \lambda x.\, t'$.

a) Demostrar que existen términos $t, s \in \Lambda$ tales que $t =_\eta s$ pero no vale $t =_\beta s$. Usar el hecho de que la β-reducción es confluente.

b) Demostrar que si t es un término de la forma $\lambda y.\, t'$ y $x \notin \mathsf{fv}(t)$ entonces $\lambda x.\, t\, x =_\beta t$.

c) Demostrar que $\to_\eta$ es SN.

d) Anteriormente en la materia estudiamos la noción de par crítico para TRSs. El cálculo-λ no es un TRS porque sus términos no son términos de primer orden. La noción de par crítico se puede generalizar a sistemas de reescritura de orden superior como el cálculo-λ. Demostrar que es posible cerrar todos los pares críticos del sistema de reescritura que se obtiene al juntar las reglas $\to_\beta$ y $\to_\eta$. Hay dos pares críticos, uno dado por $(\lambda x.\, t\, x)\, s$ con $x \notin \mathsf{fv}(t)$ y el otro dado por $\lambda x.\, (\lambda y.\, t)\, x$ con $x \notin \mathsf{fv}(\lambda y.\, t)$.

e) Demostrar que $\to_\eta$ se puede postponer después de $\to_\beta$, es decir que $\twoheadrightarrow_{\beta\eta} \subseteq \twoheadrightarrow_\beta \twoheadrightarrow_\eta$.

   Para ello, demostrar como lema auxiliar que si $t \to_\eta s \Rightarrow_\beta u$ entonces existe un término s' tal que $t \Rightarrow_\beta s' \twoheadrightarrow_\eta u$, donde $\Rightarrow_\beta$ es la reducción en simultáneo.

Ejercicio 15. Exhibir términos con las características pedidas:

a) Un λ-término $B \in \Lambda$ tal que $B\, f\, g\, t \twoheadrightarrow_\beta f\,(g\, t)$ para todo $f, g, t \in \Lambda$.

b) Un combinador $B \in \mathcal{C}$ tal que $B\, f\, g\, t \twoheadrightarrow_{\mathrm{CL}} f\,(g\, t)$ para todo $f, g, t \in \mathcal{C}$.

c) Un λ-término $C \in \Lambda$ tal que $C\, f\, t\, s \twoheadrightarrow_\beta f\, s\, t$ para todo $f, t, s \in \Lambda$.

d) Un combinador $C \in \mathcal{C}$ tal que $C\, f\, t\, s \twoheadrightarrow_{\mathrm{CL}} f\, s\, t$ para todo $f, t, s \in \mathcal{C}$.

Ejercicio 16. Sean $I := \lambda x.\, x$ y $K := \lambda x\, y.\, x$. Exhibir un término $F \in \Lambda$ tal que $F\, I =_\beta x$ y $F\, K =_\beta y$.

Ejercicio 17. Demostrar que el λ-término $\Theta := (\lambda x.\, \lambda y.\, y\, (x\, x\, y))(\lambda x.\, \lambda y.\, y\, (x\, x\, y))$ es un combinador de punto fijo, es decir, que vale $t\, (\Theta\, t) =_\beta \Theta\, t$ para todo $t \in \Lambda$.

Ejercicio 18. Exhibir un término $t \in \Lambda$ tal que $x \notin \mathsf{fv}(t)$ y $t =_\beta \lambda x.\, x\, t$.

Ejercicio 19. El teorema de punto fijo "simple" afirma que para todo $t \in \Lambda$ hay una solución a la ecuación $t\, \mathtt{X} =_\beta \mathtt{X}$, es decir, existe $s \in \Lambda$ tal que $t\, s =_\beta s$. Generalizar el teorema de punto fijo simple a la versión "múltiple", probando que para todo $t_1, \ldots, t_n \in \Lambda$ existen $s_1, \ldots, s_n \in \Lambda$ tales que $t_i\, s_1 \ldots s_n =_\beta s_i$ para todo $i \in 1..n$. Para ello usar el teorema de punto fijo simple para encontrar un término s que sea solución a la siguiente ecuación y definir s_i como $\pi_i(s)$:

$$\mathtt{X} =_\beta \langle t_1\, \pi_1(\mathtt{X}) \ldots \pi_n(\mathtt{X}),\ \ldots, t_n\, \pi_1(\mathtt{X}) \ldots \pi_n(\mathtt{X})\rangle$$

Ejercicio 20. Demostrar el teorema de punto fijo para lógica combinatoria, es decir, demostrar que para todo $a \in \mathcal{C}$ existe $b \in \mathcal{C}$ tal que $a\, b =_{\mathrm{CL}} b$.

Ejercicio 21. Usando el hecho de que el cálculo-λ_β es confluente, demostrar que:

a) No puede existir un término M tal que para todo $t, s \in \Lambda$ se tenga que $M\, (t\, s) =_\beta t$.

b) No puede existir un término M tal que para todo $t, s \in \Lambda$ se tenga que $M\, (t\, s) =_\beta s$.

Ejercicio 22. Demostrar la simulación del cálculo-λ en lógica combinatoria y viceversa usando las traducciones a_λ y t_{CL} definidas en clase. Más precisamente:

a) Demostrar que si $a \to_{\mathrm{CL}} b$ entonces $a_\lambda \twoheadrightarrow_\beta b_\lambda$.

b) Demostrar que si $t \to_\beta s$ es un paso de reducción que se deriva sin usar la regla ξ (es decir, el redex no se encuentra bajo una λ-abstracción) entonces $t_{\mathrm{CL}} \twoheadrightarrow_{\mathrm{CL}} s_{\mathrm{CL}}$.

c) Dar un ejemplo en el que $t \to_\beta s$ pero no valga $t_{\mathrm{CL}} \twoheadrightarrow_{\mathrm{CL}} s_{\mathrm{CL}}$.