Práctica 1: Reescritura abstracta

Muchas propiedades de un ARS $\mathcal{A} = (A, \to)$ se pueden expresar como inclusiones entre relaciones. Por ejemplo, la propiedad del diamante se puede expresar como la siguiente inclusión: $\leftarrow\rightarrow \subseteq \rightarrow\leftarrow$. Esta inclusión afirma que para todo par de objetos $b, c \in A$ para los cuales existe un objeto $a \in A$ tal que $b \leftarrow a \rightarrow c$ se tiene que debe existir un objeto $d \in A$ tal que $b \rightarrow d \leftarrow c$. Esto se puede representar gráficamente con el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
b \arrow[dr, dotted] & & c \arrow[dl, dotted] \\
 & d &
\end{tikzcd}$$

Recordemos las siguientes definiciones sobre un ARS $\mathcal{A} = (A, \to)$, expresadas de esta manera:

- $\to$ tiene la *propiedad del diamante* ($\Diamond$) si y sólo si $\leftarrow\rightarrow \subseteq \rightarrow\leftarrow$.
- $\to$ es *localmente confluente* ó *débilmente Church–Rosser* (WCR) si y sólo si $\leftarrow\rightarrow \subseteq \twoheadrightarrow\twoheadleftarrow$.
- $\to$ es *subconmutativa* ($\mathrm{WCR}^{\leq 1}$) si y sólo si $\leftarrow\rightarrow \subseteq \rightarrow^{=}\leftarrow^{=}$.
- $\to$ es *confluente* si y sólo si $\twoheadleftarrow\twoheadrightarrow \subseteq \twoheadrightarrow\twoheadleftarrow$.
- $\to$ es *Church–Rosser* (CR) si y sólo si $\stackrel{*}{\leftrightarrow} \subseteq \twoheadrightarrow\twoheadleftarrow$.
- $\to$ es *creciente* (Inc) si existe una función $|\cdot| : A \to \mathbb{N}$ tal que $a \to b$ implica $|a| < |b|$ para todo $a, b \in A$.
- $\to$ es *decreciente* (Dec) si existe una función $||\cdot|| : A \to \mathbb{N}$ tal que $a \to b$ implica $||a|| > ||b||$ para todo $a, b \in A$.
- $\to$ es *inductiva* (Ind) sii para toda secuencia (finita o infinita) $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$ existe un a tal que $a_i \twoheadrightarrow a$ para todo i.
- $\mathcal{A}$ es *de ramificación finita* (FB) sii para todo $a \in A$ el conjunto $\{b \in A \mid a \to b\}$ es finito.
- $\mathcal{A}$ es *globalmente finito* (GF) sii para todo $a \in A$ el conjunto $\{b \in A \mid a \twoheadrightarrow b\}$ es finito.
- $\to$ es *débilmente normalizante* (WN) si para todo objeto $a \in A$ existe un $b \in A$ en forma normal tal que $a \twoheadrightarrow b$.
- $\to$ es *fuertemente normalizante* (SN) si no existe una secuencia infinita $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots$.
- $\to$ tiene la propiedad de *forma normal* (NF) si para todo par de objetos $a, b \in A$ tales que si $a \stackrel{*}{\leftrightarrow} b$ con b en forma normal se tiene que $a \twoheadrightarrow b$.
- $\to$ tiene la propiedad de *única forma normal* (UN) si para todo par de objetos $a, b \in A$ tales que si $a \stackrel{*}{\leftrightarrow} b$ con a, b en forma normal se tiene que $a = b$.

. . . .

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{A} = (A, \to)$ un ARS. Demostrar:

a) $\twoheadrightarrow^{=} = \twoheadrightarrow$

b) $\twoheadrightarrow^{*} = \twoheadrightarrow$

c) Si $\to_1 \subseteq \to_2$ entonces $\twoheadrightarrow_1 \subseteq \twoheadrightarrow_2$.

d) $(\to^{=})^{*} = \twoheadrightarrow$

e) $\twoheadrightarrow\twoheadrightarrow = \twoheadrightarrow$

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{A} = (A, \to)$ un ARS. Dada una relación binaria $R \subseteq A \times A$, probar que son equivalentes:

a) $R = \cup_{n \geq 0} \stackrel{n}{\to}$

b) R es la relación reflexiva–transitiva *más chica*[1] que incluye a $\to$.

c) R es la intersección de todas las relaciones reflexivas y transitivas que incluyen a $\to$.

Nota: se pueden probar resultados análogos para las clausuras transitiva ($\to^+$), reflexiva ($\to^=$), simétrica ($\leftrightarrow$), etc.

Ejercicio 3. Demostrar que:

a) CR $\implies$ NF

b) CR $\implies$ UN

c) UN $\wedge$ WN $\implies$ CR

d) UN $\wedge$ WN $\implies$ Ind

e) Ind $\wedge$ Inc $\implies$ SN

Ejercicio 4. Demostrar que las siguientes implicaciones *no* valen en general para ARSs.

a) WN $\wedge$ WCR $\implies$ CR

b) WN $\wedge$ CR $\implies$ SN

Ejercicio 5. Demostrar que:

a) $\Diamond(\to) \implies \mathrm{CR}(\twoheadrightarrow)$.

b) $\mathrm{CR}(\to) \iff \mathrm{CR}(\twoheadrightarrow)$.

Ejercicio 6. Demostrar que la propiedad de confluencia es equivalente a la propiedad de Church–Rosser. Para la implicación "confluente $\implies$ CR", observar que $a \overset{*}{\leftrightarrow} b$ si y sólo si $a \overset{n}{\leftrightarrow} b$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y proceder por inducción en n.

Ejercicio 7. Demostrar la implicación $\mathrm{WCR}^{\leq 1} \implies$ CR.

Ejercicio 8. (Confluencia por interpretación) Sean $\mathcal{A} = (A, \to_1)$ y $\mathcal{B} = (B, \to_2)$ sistemas de reescritura abstractos tales que $\mathcal{B}$ es CR, $B \subseteq A$ y $\to_2 \subseteq \twoheadrightarrow_1$. Sea $[\cdot] : A \to B$ una función (llamada "función de interpretación") tal que $a \twoheadrightarrow_1 [a]$ para todo objeto $a \in A$, y tal que $a \to_1 a'$ implica $[a] \twoheadrightarrow_2 [a']$ para todo par de objetos $a, a' \in A$. Demostrar que $\mathcal{A}$ es CR.

Ejercicio 9. (Lema de Newman). En un ARS $\mathcal{A} = (A, \to)$ un objeto $a \in A$ se dice *ambiguo* si reduce a dos formas normales distintas, es decir, si existen $b, c \in A$ en forma normal tales que $b \neq c$ y además $a \twoheadrightarrow b$ y $a \twoheadrightarrow c$.

a) Suponiendo que $\mathcal{A}$ es WCR y SN, demostrar que todo objeto ambiguo tiene un reducto ambiguo, es decir, si $a \in A$ es ambiguo existe $a' \in A$ ambiguo tal que $a \to a'$.

b) Concluir que si $\mathcal{A}$ es WCR y SN no pueden existir objetos ambiguos.

c) Concluir que si $\mathcal{A}$ es WCR y SN debe ser necesariamente CR.

Este teorema se resume: "SN+WCR $\implies$ CR".

Ejercicio 10. (Klop–Nederpelt) En este ejercicio suponemos que trabajamos en un ARS $\mathcal{A}$ que es débilmente normalizante (WN), localmente confluente (WCR) y creciente (Inc).

a) Demostrar que para todo $a, b, c \in A$ tales que $a \twoheadrightarrow b$ y $a \twoheadrightarrow c$, donde b está en forma normal, se tiene que $c \twoheadrightarrow b$.

b) Usando el ítem anterior, probar que $\mathcal{A}$ es decreciente (Dec).

c) Concluir que $\mathcal{A}$ es SN.

d) Usando el lema de Newman, concluir que $\mathcal{A}$ es también CR.

[1] "Más chica" en el sentido de la inclusión.

Este resultado se atribuye a Klop y Nederpelt y se resume: "WN+WCR+Inc $\implies$ SN+CR".

Ejercicio 11. Demostrar que en un ARS $\mathcal{A}$ los dos siguientes principios son equivalentes:

i) Principio de inducción bien fundada:

$$\frac{\forall a \in A.\ (\forall b \in A.\ a \to b \implies P(b)) \implies P(a)}{\forall a \in A.\ P(a)}$$

ii) Principio de inducción bien fundada "global":

$$\frac{\forall a \in A.\,(\forall b \in A.\ a \to^{+} b \implies P(b)) \implies P(a)}{\forall a \in A.\ P(a)}$$

Ejercicio 12. (Lema de König) Demostrar que si un ARS $\mathcal{A}$ es fuertemente normalizante (SN) y de ramificación finita (FB) entonces es globalmente finito (GF). Este lema a veces se enuncia del siguiente modo: "En todo árbol infinito de ramificación finita debe existir una rama infinita".

Concluir que si un ARS $\mathcal{A}$ es SN y FB entonces para todo objeto $a \in A$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists b \in A.\ a \to^{n} b\}$ está acotado superiormente.

Ejercicio 13. Sean $\to_1, \to_2 \subseteq A \times A$ relaciones binarias en A tales que $\twoheadrightarrow_2\to_1 \subseteq \to_1^{+}\twoheadrightarrow_2$. (Es decir, si cada vez que se tiene $a \twoheadrightarrow_2 b \to_1 c$ existe un $d \in A$ tal que $a \to_1^{+} d \twoheadrightarrow_2 c$). Demostrar que si $\to_1$ y $\to_2$ son SN entonces $(\to_1 \cup \to_2)$ es SN.

Ejercicio 14. Demostrar que si la composición $\twoheadrightarrow_1\twoheadrightarrow_2$ tiene la propiedad del diamante entonces $\to_{12} := \to_1 \cup \to_2$ es confluente.

Ejercicio 15. Sean $\to_1$ y $\to_2$ tales que $\leftarrow_1\to_2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_2\leftarrow_1$.

a) Demostrar que $\twoheadleftarrow_1\overset{*}{\leftrightarrow}_2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_2\twoheadleftarrow_1$. *Sugerencia:* proceder por inducción en la cantidad de pasos de "$\twoheadleftarrow_1$".

b) Suponiendo que CR($\to_1$) y CR($\to_2$), demostrar que CR($\to_{12}$), donde $\to_{12} := \to_1 \cup \to_2$. *Sugerencia:* demostrar que la composición $\twoheadrightarrow_1\twoheadrightarrow_2$ tiene la propiedad del diamante y usar el resultado ya probado anteriormente.