Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

Superdevelopments en el cálculo-λ débil

Tesis presentada para optar al título de
Licenciado de la Universidad de Buenos Aires
en el área de Ciencias de la Computación

Pablo Barenbaum

Director
Dr. Eduardo A. Bonelli

Buenos Aires, 2010

Resumen

El cálculo-λ es uno de los formalismos más utilizados para estudiar la computación desde un punto de vista abstracto. Por un lado, tiene aplicaciones prácticas en el diseño e implementación de lenguajes de programación funcionales y asistentes de demostración. Por otro, es una herramienta teórica casi indispensable para estudiar cualquier sistema que cuente con mecanismos de sustitución y ligado de variables.

Las variantes *débiles* del cálculo-λ se caracterizan por prohibir la contracción de términos debajo de abstracciones. La relación de reducción débil propia de estas variantes es más cercana a la evaluación de los lenguajes de programación habituales, en los que no se reducen términos bajo lambdas durante la ejecución. Además, la reducción débil es interesante de por sí, en parte porque ciertas familias de propiedades, que no se cumplen en el cálculo-λ con la relación de reducción usual, se satisfacen si la relación se debilita. Otro motivo por el cual esta variante es interesante es que es una manera de relacionar la β-reducción en el cálculo-λ con la reducción en la lógica combinatoria.

Un *superdevelopment* es una secuencia de pasos de reducción en la cual, en cada paso, sólo se permite contraer los residuos de los redexes que figuraban en el término inicial, y también algunos de los redexes creados. La razón principal que motiva el estudio de los superdevelopments es que pueden aplicarse como técnica para probar la confluencia del sistema en cuestión.

En este trabajo, se estudian los superdevelopments para una variante confluente del cálculo-λ débil, introducida por Çağman y Hindley. Para ello, se estudia primero de qué maneras pueden crearse redexes en el cálculo-λ débil. Esto motiva dos caracterizaciones de superdevelopments para este cálculo: la primera definición se basa en una relación de reducción en un paso sobre términos decorados con etiquetas, y la segunda en un juicio de reducción simultánea definido inductivamente.

A partir del cálculo etiquetado con el que se formulan los superdevelopments, se da en primer lugar una prueba de que son finitos. Una vez hecho esto, la parte central del trabajo consiste en el análisis y la comparación de las dos caracterizaciones de superdevelopments en el contexto del cálculo-λ débil, y en el estudio de la relación no obvia entre ellas, mostrando que las dos definiciones son esencialmente equivalentes.

Agradecimientos

A mi familia toda; especialmente a mis padres/viejos y a LA HONA. Tratar de expresar por qué en palabras no sólo es innecesario sino que sería imposible y multiplicaría varias veces el tamaño de esta tesis.

A Eduardo, que siempre encuentra la manera de capturar la esencia de las ideas y los problemas, por muy vagos o mal definidos que estén. Sus respuestas y observaciones son siempre oportunas y vienen invariablemente acompañadas de referencias que discuten, generalizan y tornan obsoletas las preguntas en cuestión. Además, su optimismo es contagioso y su humildad contrasta con lo bien que hablo de él en este párrafo.

A Alejandro y Delia, por haber hecho el ciclópeo esfuerzo de leer y entender esta tesis, haciéndome pensar que quizá, después de todo, no excede los límites de la cordura.

A mis amigos –compañeros, docentes, alumnos y todas sus combinaciones– de la facultad. Especialmente a la gente de TPSH. Desde el primer día de la carrera, es increíble estar rodeado de gente siempre rebosante de ganas de hacer, de inquietudes, no necesariamente académicas, y de buena voluntad. No creo poder agradecer sensatamente a quienes en tan gran admiración y estima tengo; vaya pues, a modo de premio consuelo, la presente oración.

7c96a10c9f5a0c229e7675b60ae9f9ac

A los que siempre están y a los que ya no.

Índice general

1 Introducción

Los sistemas formales que actualmente se conocen como cálculo-λ y lógica combinatoria surgieron alrededor de la década de 1930, como herramientas para estudiar la abstracción y la aplicación de funciones, y la operación de sustitución. Originalmente, estos formalismos no se consideraban interesantes de por sí, sino que eran partes de otros sistemas más complejos que pretendían dar fundamentos formales para la matemática y la lógica, basados en el concepto de función [Ros84, CH06].

El cálculo-λ se basa en la notación de funciones mediante abstracciones de la forma $\lambda x.M$, donde M es una expresión que puede contener cero o más ocurrencias de x. Por ejemplo, con esta notación, $\lambda x.x + 1$ representa la función que asocia un número a su sucesor. La regla central del cálculo-λ es la siguiente regla, conocida como β-reducción:

$$(\lambda x.M)\, N \to M\{x := N\}$$

donde $M\{x := N\}$ representa el término M con todas las ocurrencias de x reemplazadas por N. La lógica combinatoria es un formalismo alternativo al cálculo-λ, en algún sentido más simple, donde las funciones no se definen construyendo abstracciones basadas en expresiones con variables ligadas, sino componiendo algunas pocas funciones fijadas de antemano, conocidas como combinadores. Ambos formalismos están estrechamente relacionados y resultan ser equivalentes en poder expresivo, permitiendo expresar todas las funciones computables.

Inicialmente, el estudio del cálculo-λ y la lógica combinatoria estaba restringido al grupo de lógicos interesados en trabajar formalmente con la operación de sustitución y sus propiedades. Sin embargo, hacia la década de 1950, se obtuvieron resultados cuya importancia trascendía la de estos formalismos concretos. En particular, se formularon los resultados fundamentales de teoría de tipos y de reescritura abstracta, incluyendo el estudio de las nociones de confluencia y residuo. La relevancia de estos resultados justificó e impulsó el estudio del cálculo-λ, y de los sistemas de reescritura en general. Actualmente, por su simplicidad y su poder expresivo, el cálculo-λ se usa como lenguaje de programación paradigmático, que tiene aplicaciones centrales en el estudio de la semántica, la lógica y la implementación de lenguajes de programación.

En el cálculo-λ se permite que se reduzcan términos debajo de abstracciones, operando con variables ligadas. Esto difiere de lo que ocurre usualmente en los lenguajes de programación, en los cuales el cuerpo de una función no se ejecuta hasta que la función es invocada y se instancian sus parámetros formales. En las variantes del cálculo-λ conocidas como "cálculo-λ débil" se prohíbe que se reduzcan términos debajo de abstracciones. La noción de reducción débil estudiada en este trabajo es de Howard [How70], de acuerdo con Çağman y Hindley [cH98]. Surge como consecuencia de tratar de formular una correspondencia más precisa entre la reducción en el cálculo-λ y en la lógica combinatoria. Fue estudiada previamente por Blanc, Lévy y Maranget [LM99, BLM05].

Por otra parte, la noción de reducción paralela es una variante de la reducción en el cálculo-λ. Un paso de reducción paralela corresponde a varios pasos de la reducción usual en el cálculo-λ, con ciertas restricciones. El origen de esta noción se remonta a la prueba clásica de la confluencia del cálculo-λ dada por Tait y Martin-Löf [ML71, Bar71, Ste72, HLS72], e incluso a trabajos previos [CF58, Hin69]. La noción de reducción paralela fue refinada por Takahashi [Tak89].

Estrechamente relacionadas con la reducción paralela utilizada en la prueba de Tait y Martin-Löf están las nociones de descendiente y residuo. La relación de descendiente permite "rastrear" términos a lo largo de reducciones en el cálculo-λ. En un paso de reducción en el cálculo-λ, un *redex* es el subtérmino sobre el que se aplica la regla β. Los residuos de un redex son sus descendientes. Church y Rosser trabajaron con la noción de residuo en la prueba original de la confluencia del cálculo-λ [CR36]. Newman y Schroer estudiaron la noción de residuo en un marco abstracto [New42, Sch65]. La teoría de residuos fue ampliamente estudiada por Lévy y otros [Ĺ78, HL91, KG, Mel02, Hue94].

A partir de los residuos, se formula la noción de development. Un development es una secuencia de pasos de reducción en la cual sólo se permite contraer los residuos de los redexes presentes en el término inicial. Los superdevelopments son una variante relajada de los developments, en los que también se admite que se contraigan ciertos redexes que *no* son residuos de los redexes originales. Los superdevelopments fueron introducidos por Aczel para probar la confluencia de una versión generalizada del cálculo lambda [Acz78]. Técnicas similares fueron aplicadas por van Raamsdonk [vR93, vR96], Mayr y Nipkow [MN98] como herramientas para estudiar y probar la confluencia en sistemas de reescritura de alto orden. Otra aplicación de superdevelopments es la de *matching* en reescritura de alto orden. Si bien este problema se ha demostrado decidible recientemente [Sti09] una manera de restringirlo para obtener algoritmos que lo resuelvan de manera práctica es debilitando la relación de reducción, utilizando superdevelopments completos en lugar de reducción a forma normal. de Moor y Sittampalam aplican superdevelopments en el contexto del sistema MAG [dMS98, dMS01, SdM01] proponiendo un algoritmo para la transformación automática de programas funcionales. Faure [Fau06] también estudia *matching* módulo superdevelopments.

1.1. Objetivos de esta tesis

El objetivo de esta tesis es estudiar la noción de superdevelopments en el cálculo-λ débil. En el cálculo-λ, la definición de superdevelopment es una variante relajada de la noción de development, en la que se permite contraer algunos de los redexes que se crean a lo largo de la reducción. Para proceder de manera similar en el cálculo-λ débil, en primer lugar, se estudia de qué manera pueden crearse redexes nuevos en el cálculo-λ débil, es decir, se determina exactamente en qué circunstancias, dado un paso de reducción, aparecen redexes que no son residuos de redexes ya presentes en el término inicial.

A partir de este análisis se motiva una definición adecuada de superdevelopments. Concretamente, se formulan dos definiciones formales de superdevelopments en el cálculo-λ débil. La primera definición se basa en una relación de reducción en un paso sobre términos decorados con etiquetas. Además se caracterizan los superdevelopments de una segunda manera, basada en un juicio de reducción simultánea definido inductivamente. Estas dos definiciones son en algún sentido complementarias y son dos maneras usuales de caracterizar relaciones de reducción. La definición basada en términos con etiquetas es concisa, pero la caracterización de los superdevelopments *completos* requiere reducir los términos a forma normal, lo cual en general complica los razonamientos. Por eso es conveniente contar también con una definición inductiva directa de los superdevelopments débiles.

Partiendo de estas definiciones, se establecen algunas de las propiedades más importantes de esta noción, similares a las que cumplen los superdevelopments en el cálculo-λ usual. En particular se ve que los superdevelopments son finitos, es decir que en la variante del cálculo decorada con etiquetas no puede construirse una secuencia infinita de pasos de reducción.

El objetivo central del trabajo es estudiar las dificultades que surgen al demostrar la equivalencia de las dos formulaciones de superdevelopments.

1.2. Preliminares

En esta sección se presentan algunas nociones preliminares, convenciones de notación y la variante débil del cálculo-λ con la que se trabajará, el cálculo-λ^w.

1.2.1. Reescritura abstracta

Dado un conjunto A, se llama *reducción* a una relación binaria $\rightarrow \subseteq A^2$. Se nota $\rightarrow^*$ o $\twoheadrightarrow$ a la clausura reflexiva–transitiva de $\rightarrow$.

Definición 1.2.1 (Forma normal)**.** Dada una reducción $\rightarrow$, un elemento $a \in A$ está en $\rightarrow$*-forma normal* sii no existe $b \in A$ tal que $a \rightarrow b$.

Definición 1.2.2 (SN)**.** Una relación $\rightarrow$ sobre un conjunto A es *fuertemente normalizante* (SN) sii no existe una secuencia infinita de pasos de reducción $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow ...$ con $a_i \in A$ para todo i.

Ocasionalmente se hablará de la "finitud" de los (super)developments, refiriéndose al hecho de que toda posible secuencia de pasos de reducción es finita, es decir que la reducción con la que se definen los (super)developments es SN.

Definición 1.2.3. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ se dice *compatible* con una reducción $\rightarrow$ sii $a \rightarrow b$ implica $f(a) > f(b)$.

La existencia de una función compatible con $\rightarrow$ implica que $\rightarrow$ es SN.

Definición 1.2.4 (CR). Una reducción $\rightarrow \subseteq A^2$ es *confluente* o *Church–Rosser* (CR) sii para todo $a, a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \twoheadleftarrow a \twoheadrightarrow a_2$ existe $b \in A$ tal que $a_1 \twoheadrightarrow b \twoheadleftarrow a_2$.

Definición 1.2.5 (Propiedad del diamante). Una reducción $\rightarrow \subseteq A^2$ satisface la *propiedad del diamante* sii para todo $a, a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \leftarrow a \rightarrow a_2$ existe $b \in A$ tal que $a_1 \rightarrow b \leftarrow a_2$.

La técnica clásica de Tait y Martin-Löf para demostrar la confluencia de una relación $\rightarrow$ es definir una relación asociada $\Rightarrow$ que cumpla las dos propiedades siguientes:

1. $\rightarrow \subseteq \Rightarrow \subseteq \twoheadrightarrow$

2. $\Rightarrow$ satisface la propiedad del diamante

De este modo, por el ítem 1 resulta que $\rightarrow^* \subseteq \Rightarrow^* \subseteq \twoheadrightarrow^*$, es decir $\Rightarrow^* = \twoheadrightarrow$. Además, por el ítem 2, resulta que $\Rightarrow^* = \twoheadrightarrow$ es CR, lo cual es equivalente a afirmar que $\rightarrow$ es CR.

1.2.2. El cálculo-λ básico

Definición 1.2.6. Los términos $M \in \Lambda$ del cálculo-λ básico se definen recursivamente mediante la siguiente sintaxis abstracta:

$$M, N ::= x \mid M\,N \mid \lambda x.M$$

Donde x representa cualquier variable tomada de un conjunto infinito numerable $\mathcal{V}$.

Una ocurrencia de una variable x en un término M se dice *ligada* si ocurre en un subtérmino de la forma $\lambda x.N$. En caso contrario se dice *libre*. El conjunto de variables libres se define de la manera usual; se nota $\mathsf{fv}(M)$ al conjunto de variables libres de M:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{fv}(x) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{x\} \\ \mathsf{fv}(M\,N) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathsf{fv}(M) \cup \mathsf{fv}(N) \\ \mathsf{fv}(\lambda x.M) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathsf{fv}(M) \setminus \{x\} \end{array}$$

El renombre de variables ligadas (α-conversión), no cambia el significado de un término. Los términos que sólo difieren en los nombres de las variables ligadas se consideran α-equivalentes. Para simplificar los razonamientos, se adopta la convención de variables de Barendregt [Bar84], es decir que en el curso de las definiciones y demostraciones se asume que todas las variables ligadas son diferentes de las variables libres y, además, que las variables ligadas por ligadores distintos son distintas entre sí. Esto es natural porque se trabaja módulo α-equivalencia.

Definición 1.2.7. La reducción en el cálculo-λ se define mediante las siguientes reglas, que determinan el juicio $M \rightarrow N$:

$$\frac{}{(\lambda x.M)\,N \rightarrow M\{x := N\}}\,\beta \qquad \frac{M \rightarrow M'}{M\,N \rightarrow M'\,N}\,\mu$$

$$\frac{N \rightarrow N'}{M\,N \rightarrow M\,N'}\,\nu \qquad \frac{M \rightarrow M'}{\lambda x.M \rightarrow \lambda x.M'}\,\xi$$

Donde $M\{x := N\}$ representa la sustitución (evitando la captura de variables) de todas las ocurrencias libres de x en M por el término N.

Un *contexto* C es un término con exactamente una ocurrencia de un agujero $\Box$:

$$C ::= \Box \mid M\,C \mid C\,N \mid \lambda x.C$$

Se nota $C[M]$ al resultado de reemplazar el agujero en C por M (esto puede eventualmente ligar las variables libres de M en $C[M]$).

Es claro que la definición de la reducción en el cálculo-λ es equivalente a esta única regla, escrita con notación de contextos:

$$\frac{}{C[(\lambda x.P)\,Q] \to C[P\{x := Q\}]}$$

En un paso de reducción $M \to N$, se llama *redex* al subtérmino de M sobre el que se aplica la regla β, es decir a $\Delta = (\lambda x.P)\,Q$ en esta segunda definición de $\to$. Se dice que en ese paso de reducción el redex Δ se contrae.

Una posición (notada con letras p, q, r) es una secuencia de enteros positivos; ϵ es la posición de la raíz (secuencia vacía) y $p \cdot q$ es la operación (asociativa) de concatenación de secuencias. Si P es un conjunto de posiciones, se nota $p \cdot P$ al conjunto que resulta de concatenar p con cada posición en P. Se nota $\mathsf{pos}(M)$ al conjunto de posiciones de M:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{pos}(x) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{\epsilon\} \\ \mathsf{pos}(M\,N) & \stackrel{\text{def}}{=} & (0 \cdot \mathsf{pos}(M)) \cup (1 \cdot \mathsf{pos}(N)) \\ \mathsf{pos}(\lambda x.M) & \stackrel{\text{def}}{=} & 0 \cdot \mathsf{pos}(M) \end{array}$$

El subtérmino de M en la posición p es $M|_p$. Además, $M[N]_p$ representa el término que resulta de reemplazar el subtérmino en la posición p de M por N (lo cual puede eventualmente ligar las variables libres de N en $M[N]_p$).

El *binding path* de un contexto C notado $\mathsf{bp}(C)$, es la secuencia de variables que están ligadas en la posición del agujero en C:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{bp}(\Box) & \stackrel{\text{def}}{=} & \epsilon \\ \mathsf{bp}(C\,N) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathsf{bp}(C) \\ \mathsf{bp}(M\,C) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathsf{bp}(C) \\ \mathsf{bp}(\lambda x.C) & \stackrel{\text{def}}{=} & x \cdot \mathsf{bp}(C) \end{array}$$

Dos conjuntos de variables S y T se dicen *compatibles* ($S \uparrow T$) sii son disjuntos, es decir sii $S \cap T = \emptyset$. Se usan las letras L y K para notar secuencias de variables, y se usa la notación $L, K \subseteq \mathcal{V}$ para indicar que L y K son secuencias de variables. Por abuso de notación, en algunos casos las secuencias de variables se tratan como conjuntos, por ejemplo $\mathsf{fv}(M) \uparrow L$. Teniendo esto en cuenta, se dice también que un término M es *compatible* con un contexto C sii $\mathsf{fv}(M) \uparrow \mathsf{bp}(C)$. Además, se nota $L \subseteq K$ para indicar que el conjunto subyacente a L está incluido en el de K. Se nota $L \setminus K$ a la diferencia entre los conjuntos subyacentes a L y K, y $\#(L)$ al cardinal de L.

1.2.3. El cálculo-λ^w

En este trabajo se estudiará una variante *débil* del cálculo-λ. La característica central del cálculo-λ débil es que, a diferencia de lo que ocurre en el cálculo-λ usual, la reducción de términos bajo lambdas no está permitida. El cálculo que se obtiene al introducir esta prohibición es, discutiblemente, más representativo de los lenguajes de programación, en los cuales lo habitual es considerar que las abstracciones son valores.

Sin embargo, si esta restricción se formula de manera ingenua y simplemente se elimina la siguiente regla:

$$\frac{M \to N}{\lambda x.M \to \lambda x.N}\ \xi$$

el cálculo que se obtiene no es confluente, como se comprueba con el siguiente ejemplo:

$$(\lambda xy.x)\, M \to (\lambda xy.x)\, M' \to \lambda y.M'$$

$$(\lambda xy.x)\, M \to \lambda y.M \not\to \lambda y.M'$$

Es posible recuperar la confluencia del cálculo restringiendo apropiadamente la regla ξ [cH98, LM99]. En la siguiente regla, el juicio $M \xrightarrow{\Delta} N$ significa "M reduce a N contrayendo el redex Δ" y $\mathsf{fv}(\Delta)$ son las variables libres de Δ.

$$\frac{M \xrightarrow{\Delta} N \quad x \notin \mathsf{fv}(\Delta)}{\lambda x.M \xrightarrow{\Delta} \lambda x.N}\ \xi'$$

Es decir que se permite contraer un redex debajo de una abstracción sólo cuando no tenga ocurrencias de variables que estén ligadas por dicha abstracción.

Por ejemplo, la siguiente reducción es válida en este cálculo (se subraya en cada paso el subtérmino que se contrae):

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.y)\, x)\, z} \to \underline{(\lambda y.y)\, z} \to z$$

Pero la siguiente no, porque en $(\lambda y.y)\, x$ la variable x está ligada en el contexto:

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.y)\, x})\, z \not\to (\lambda x.x)\, z$$

A continuación se define el cálculo-λ débil (cálculo-λ^w). Los términos del cálculo-λ^w son los términos usuales Λ del cálculo-λ. Se adaptan también todas las definiciones de variables libres y ligadas, contextos y posiciones mencionadas para el cálculo-λ básico.

Definición 1.2.8. La relación de reducción en un paso en el cálculo-λ^w se define mediante la siguiente regla:

$$\frac{\Delta = (\lambda x.M)\, N \quad \mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C)}{C[(\lambda x.M)\, N] \xrightarrow{\Delta} C[M\{x := N\}]}$$

Se llama *redex* a Δ. En esta definición se condensan las reglas usuales del cálculo-λ, contemplando además la restricción de la regla ξ mencionada anteriormente. Una manera alternativa de definir la relación es mediante el siguiente conjunto de reglas:

$$\frac{\Delta = (\lambda x.M)\,N}{(\lambda x.M)\,N \xrightarrow{\Delta} M\{x := N\}}\,\beta \qquad \frac{M \xrightarrow{\Delta} M'}{M\,N \xrightarrow{\Delta} M'\,N}\,\mu$$

$$\frac{N \xrightarrow{\Delta} N'}{M\,N \xrightarrow{\Delta} M\,N'}\,\nu \qquad \frac{M \xrightarrow{\Delta} M' \quad x \notin \mathsf{fv}(\Delta)}{\lambda x.M \xrightarrow{\Delta} \lambda x.M'}\,\xi'$$

Es claro que las dos definiciones son equivalentes. Se escribe $M \to N$ cuando $M \xrightarrow{\Delta} N$ para algún Δ.

1.2.4. Developments y superdevelopments

Las nociones de development y superdevelopment se formalizan mejor en el capítulo 2, pero se introducen brevemente las ideas en esta sección. Un development de un término M es una secuencia de pasos de reducción en la cual sólo se contraen residuos de redexes presentes en M. Por ejemplo, si se tiene $\Delta = (\lambda y.y)\,z$ y $\Delta' = z$, las siguientes secuencias de pasos de reducción son developments:

$$(\lambda x.x)\,\Delta \to \Delta \to \Delta'$$

$$(\lambda x.x)\,\Delta \to (\lambda x.x)\,\Delta' \to \Delta'$$

Pero la siguiente secuencia de pasos de reducción no es un development, porque el redex subrayado no es un residuo de un redex presente en el término original:

$$(\lambda x.\lambda y.y)\,z\,w \to \underline{(\lambda y.y)\,w} \to w$$

En un superdevelopment, además de la contracción de residuos de redexes ya presentes en M, se permite contraer algunos de los redexes creados. En el cálculo-λ los redexes pueden crearse de las tres maneras siguientes [Ĺ78]:

I. $(\lambda x.x)\,(\lambda y.P)\,Q \to (\lambda y.P)\,Q$

II. $(\lambda x.\lambda y.P)\,R\,Q \to (\lambda y.P\{x := R\})\,Q$

III. $(\lambda x.C[x\,Q])\,\lambda y.P \to C'[(\lambda y.P)\,Q']$, donde $C' = C\{x := \lambda y.P\}$ y $Q' = Q\{x := \lambda y.P\}$.

Un superdevelopment de M permite que se contraigan los redexes creados por los casos I y II. En el cálculo-λ los superdevelopments son finitos [Acz78, vR93, vR96].

1.3. Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se estudia la noción de residuo en el cálculo-λ^w. Se introduce un cálculo auxiliar con términos marcados a partir del cual se caracteriza de qué manera se crean redexes en el cálculo-λ^w.

En el capítulo 3 se enuncian las dos definiciones de superdevelopments para el cálculo-λ^w. Primero se introducen los términos etiquetados y la relación de reducción etiquetada, a partir de la cual se definen los superdevelopments débiles. Se da una prueba directa de que los superdevelopments definidos de esta manera son finitos, además de algunas propiedades básicas del cálculo etiquetado. Finalmente se introduce el juicio de reducción simultánea, los supersteps débiles.

En el capítulo 4 se prueba la equivalencia, bajo ciertas condiciones, entre la relación de redución etiquetada y los supersteps, para lo cual se introducen varios formalismos intermedios.

En el capítulo 5 se exponen las conclusiones generales del trabajo.

En el apéndice A se desarrollan las demostraciones de la mayoría de los resultados enunciados en el cuerpo del trabajo.

1.4. Contribuciones

Las contribuciones principales de este trabajo serían las siguientes:

- Análisis de la creación de redexes en el cálculo-λ^w (Proposición 2.3.8)
- Prueba directa de la finitud de los superdevelopments débiles en el cálculo-λ^w (Teorema 3.4.14). La misma demostración debería poder adaptarse con mínimas modificaciones para los superdevelopments en el cálculo-λ.
- Prueba de la equivalencia entre las dos formulaciones de superdevelopments (Teorema 4.1.1).

Las definiciones de superdevelopments débiles que surgieron como resultado de esta tesis, así como algunas de sus propiedades centrales, fueron presentadas en el marco del *9th International Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming* (WRS'09) y publicadas en *Proceedings of WRS'09* [BB10].

2 Creación de redexes en el cálculo-λ^w

2.1. Introducción

En este capítulo se introducen la nociones de *residuo* y *redex creado*, que son esenciales para motivar la definición de los superdevelopments. En la Sección 2.2 se hace una introducción informal de estas nociones en el marco del cálculo-λ. En la Sección 2.3 se caracteriza formalmente de qué manera se crean redexes en el cálculo-λ^w, mediante la introducción de un cálculo auxiliar con términos marcados.

Informalmente, dado un paso de reducción $M \to N$, un redex Δ' en N es un residuo de un redex Δ en M si Δ' es un descendiente de Δ. Si Δ' no es residuo de ningún redex en M, se dice que Δ' es un redex creado. Es decir, Δ' es un redex creado si el patrón de Δ' no figuraba ya en el término M.

Por ejemplo, en el siguiente paso de reducción, los dos redexes subrayados en N son residuos del redex subrayado en M, porque el patrón del redex $I\,y$ proviene de M:

$$M = (\lambda x.z\,x\,x)\,(\underline{I\,y}) \to z\,(\underline{I\,y})\,(\underline{I\,y}) = N$$

En cambio, en los dos casos siguientes, el redex subrayado es un redex creado:

$$(\lambda x.\lambda y.x)\,z\,w \to \underline{(\lambda y.z)\,w}$$

$$(\lambda x.x\,z)\,\lambda y.y \to \underline{(\lambda y.y)\,z}$$

Como se mencionó en la introducción, en el cálculo-λ los redexes pueden crearse de tres maneras. Más adelante, se caracterizarán las cuatro maneras en las que se crean redexes en el cálculo-λ^w.

2.2. Residuos y redexes creados

En un sistema de reescritura como el cálculo-λ, es natural que surja la noción de development. Un *development* es una secuencia de pasos de reducción que comienza en un término M y, en cada paso, contrae sólo redexes que sean descendientes de redexes de M (es decir, sólo redexes de M o sus residuos). Por ejemplo, tomando $\Delta = (\lambda y.y)\,\lambda z.z$ y $\Delta' = \lambda z.z$, y partiendo del término $M = (\lambda x.xx)\,\Delta$, la siguiente secuencia de pasos de reducción es un development (se subraya el subtérmino que se contrae):

$$M = \underline{(\lambda x.xx)\,\Delta} \to \underline{\Delta}\,\Delta \to \Delta'\,\Delta = N_1 \tag{2.1}$$

El primer paso de reducción produce dos copias de Δ, una de las cuales se contrae en el paso posterior.

Además, un development de M es *completo* si se contraen exactamente (todos y solamente) los residuos de redexes en M. Por ejemplo, la secuencia de pasos de reducción en (2.1) no es un development completo de M, porque todavía contiene una ocurrencia de Δ que proviene de M y se puede seguir reduciendo. La siguiente secuencia de pasos sí es un development completo de M:

$$M = \underline{(\lambda x.xx)\,\Delta} \to \underline{\Delta}\,\Delta \to \Delta'\,\underline{\Delta} \to \Delta'\,\Delta' = N_2 \tag{2.2}$$

Es un development completo porque $N_2 = (\lambda z.z)\,\lambda z.z$ contiene un único redex, pero éste no desciende de un redex que ya estuviera presente en M. Por lo tanto, si se reduce N_2, la secuencia de pasos extendida ya no es un development.

La siguiente secuencia de pasos de reducción es otra manera de llegar de M a N_2:

$$M = (\lambda x.xx)\,\underline{\Delta} \to \underline{(\lambda x.xx)\,\Delta'} \to \Delta'\,\Delta' = N_2 \tag{2.3}$$

Una observación que podría ser importante en este caso es que, en el segundo paso de reducción, se contrae un redex $(\lambda x.xx)\,\Delta'$ que no figura *literalmente* en M. Sin embargo, es razonable pensar que esta secuencia de pasos también debería considerarse un development completo de M. La justificación intuitiva es que el patrón $(\lambda x....)\,...$, es decir la "esencia" del redex, está presente en M desde el principio.

Es sencillo dar una definición inductiva de la relación de development completo, mediante juicios de reducción simultánea. Pero una formalización basada en pasos de reducción requiere más cuidado. Un motivo de esto es que los redexes de M pueden estar anidados, como ocurre en (2.2), y esto puede ocasionar que aparezcan varias copias de un redex, o que algún redex desaparezca.

Pero la dificultad central es que no está claro en principio de qué manera se puede afirmar formalmente que un redex "ya figuraba" en M y cuándo es "nuevo". Estas preguntas motivan la teoría de residuos [Ĺ78, HL91, KG, Mel02, Hue94]. Afirmar que un subtérmino es *residuo* de un redex presente en M es la manera formal de decir que se trata de un redex cuyo patrón ya figuraba en M.

Una manera de formalizar estas nociones es definiendo cuándo una posición es descendiente de otra, de la siguiente manera:

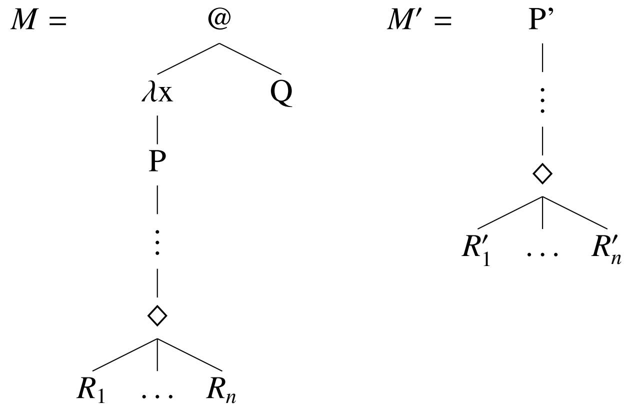
Definición 2.2.1 (Descendiente en el cálculo-λ)**.** Dado un paso de reducción $M \to N$, se dice que el término en la posición $q \in \mathsf{pos}(N)$ es *descendiente* del término en la posición $p \in \mathsf{pos}(M)$ (o simplemente q es descendiente de p) en los siguientes casos:

1. Si la reducción es a la cabeza, $M = (\lambda x.P)\,Q \to P\{x := Q\} = N$, entonces q es descendiente de p sii se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

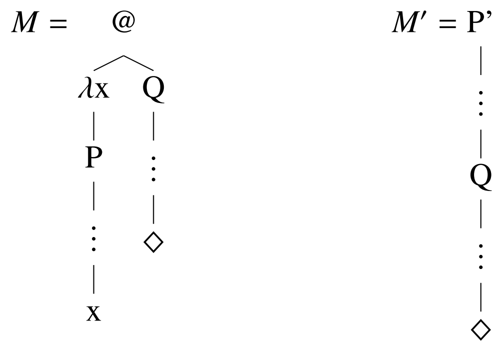
a) $q \in \mathsf{pos}(P)$ y $P|_q \neq x$ con $p = 00q$.

b) $q = q_1q_2$, $P|_{q_1} = x$ y $q_2 \in \mathsf{pos}(Q)$, con $p = 1q_2$.

2. Si la reducción es en un contexto, $M = C[\Delta] \to C[\Delta'] = N$, con $C|_r = \square$, entonces q es descendiente de p sii $p = rp'$, $q = rq'$, y q' es descendiente de p' en el paso de reducción $\Delta \to \Delta'$.



(a) Caso 1.a) El subtérmino $\Diamond$ está en las posiciones $P|_q$ y $P'|_q$ es decir en $M|_{00q}$ y $M'|_q$. La estructura de $\Diamond$ puede ser una abstracción ($n = 1$), una aplicación ($n = 2$) o incluso una variable ($n = 0$) pero no puede ser x.



(b) Caso 1.b) El subtérmino $\Diamond$ está en la posición $Q|_{q_2}$ y por lo tanto en $M|_{1q_2}$. La variable x está en la posición $P|_{q_1}$ y por lo tanto $\Diamond$ ocurre en $M'|_{q_1q_2}$.

Figura 2.1: Dos casos de descendencia, con $M = (\lambda x.P)\, Q \to M'$.

En la Figura 2.1 se ilustran los dos casos de la Definición 2.2.1. El ítem 1. es el caso interesante. La idea es que en un paso de reducción $(\lambda x.P)\, Q \to P\{x := Q\}$, todos los subtérminos de $P\{x := Q\}$ descienden, o bien de un subtérmino de P, o bien de un subtérmino de Q. Dado un subtérmino de $P\{x := Q\}$, la primera posibilidad es que resulte de aplicar la operación de sustitución sobre un subtérmino de P, sin modificar su estructura. Para esto debe ser un subtérmino de P distinto de x.

Esto se expresa en la condición 1.a) de la definición, exigiendo $q \in \mathsf{pos}(P)$ y $P|_q \neq x$. Notar que el subtérmino de P en cuestión no puede *ser* x, pero puede *contener* ocurrencias de x. Por ejemplo, en el siguiente paso de reducción:

$$(\lambda x.P)\,Q = (\lambda x.zx(\underline{zx}))\,y \to zy(\underline{zy})$$

la aplicación subrayada a la derecha es descendiente de la aplicación subrayada en P, que contiene una x. La segunda posibilidad es que el subtérmino de $P\{x := Q\}$ sea en realidad un subtérmino de Q, bajo alguna posición de P en la que haya una x. Esto se expresa en la condición 1.b) de la definición, exigiendo $q = q_1 q_2$, con $P|_{q_1} = x$ y $q_2 \in \mathsf{pos}(Q)$. Por ejemplo, en el paso de reducción anterior, cada una de las ocurrencias de y en el término de la derecha es descendiente de Q:

$$(\lambda x.P)\,Q = (\lambda x.zx(zx))\,\underline{y} \to z\underline{y}(z\underline{y})$$

Esta definición puede generalizarse fácilmente para una secuencia de pasos de reducción: en el caso base, es decir en cero pasos de reducción, toda posición $p \in \mathsf{pos}(M)$ se considera descendiente de sí misma. En general ocurre que si $M_1 \twoheadrightarrow M_2 \twoheadrightarrow M_3$, una posición $p_3 \in \mathsf{pos}(M_3)$ es descendiente de una posición $p_1 \in \mathsf{pos}(M_1)$ sii p_3 es descendiente de una posición $p_2 \in \mathsf{pos}(M_2)$ que a su vez es descendiente de p_1.

No es difícil verificar que en una secuencia de pasos de reducción $M \twoheadrightarrow N$ toda posición $q \in \mathsf{pos}(N)$ es descendiente de una y sólo una posición $p \in \mathsf{pos}(M)$.

Definición 2.2.2 (Residuo y redex creado en el cálculo-λ)**.** Dado un paso de reducción $M \to N$, un redex $N|_q$ es *residuo* de un redex $M|_p$ sii q es descendiente de p. Un redex $N|_q$ es un *redex creado* sii, para la única posición $p \in M$ tal que q es descendiente de p, $M|_p$ no es un redex.

Los descendientes de un redex siempre son redexes. Es decir, si $M|_p = (\lambda x.P)\,Q$ es un redex y $q \in \mathsf{pos}(N)$ es descendiente de p, entonces $N|_q$ debe ser de la forma $(\lambda x.P')\,Q'$.

Otra manera posible de definir la noción de residuo es trabajando con términos en los cuales algunas lambdas pueden estar marcadas (escribiendo, por ejemplo, $\lambda^\star x.M$). Para construir un development de un término M, se marcan todas las abstracciones que están a la cabeza de alguna aplicación. La regla β se modifica de manera tal que sólo permita contraer redexes marcados (aquellos cuya lambda se encuentre marcada). Por ejemplo, si se marcan las lambdas de M, el ejemplo (2.2) puede reescribirse así:

$$\begin{aligned}\underline{(\lambda^\star x.xx)\,((\lambda^\star y.y)\,\lambda z.z)} &\to \underline{(\lambda^\star y.y)\,(\lambda z.z)}\,((\lambda^\star y.y)\,\lambda z.z)\\ &\to (\lambda z.z)\,\underline{((\lambda^\star y.y)\,\lambda z.z)} \to (\lambda z.z)\,\lambda z.z\end{aligned}$$

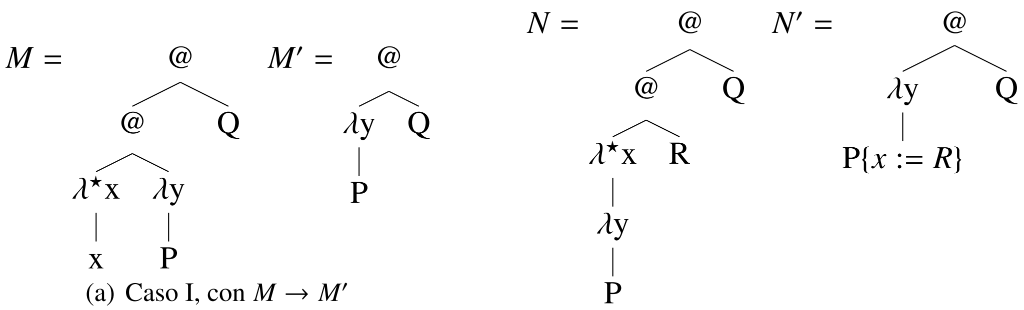
En este ejemplo se ve que los redexes marcados coinciden exactamente con los residuos de redexes que ya estaban presentes en el término inicial. Si se parte de un término M con un redex marcado y se realiza un paso de reducción, los redexes cuyas abstracciones siguen estando marcadas son residuos del redex marcado en M. Si se marcan todos los redexes de M, los redexes que no están marcados después de un paso de reducción son redexes creados por dicho paso de reducción.

A partir de cualquiera de estas dos formalizaciones de residuo y redex creado, se definen los developments de la siguiente manera:

Definición 2.2.3 (Developments en el cálculo-λ). Un development es una secuencia de pasos de reducción $M \twoheadrightarrow N$ en la cual, en cada paso, el redex que se contrae es residuo de un redex en M.

Partiendo de esta definición de development, una pregunta bastante natural que uno puede formularse es si es posible debilitar la relación para permitir que se contraigan no solamente los residuos, sino también algún subconjunto de los redexes creados. De esta pregunta surge justamente la definición de superdevelopment. Obviamente, al hacer esto, además de debilitar la relación, el objetivo es hacerlo de manera tal que se preserven las buenas propiedades que cumplen los developments. Las propiedades más importantes son la finitud y la confluencia: es decir, todos los superdevelopments completos que empiezan en un término M deben finalizar en el mismo término M'.

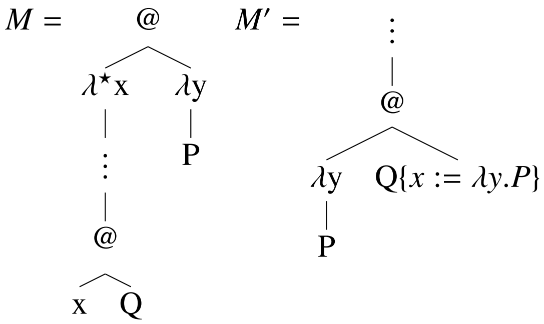
En el cálculo-λ, lo que permite dar una definición de superdevelopments que cumpla con las propiedades esperadas es el hecho de que los redexes pueden crearse de tres maneras diferentes, y sólo de estas tres maneras, que son las mencionadas en la introducción. De los tres casos, en los dos primeros la creación del redex está dada por interacción hacia arriba entre los términos (Figura 2.2), mientras que en el tercer caso, la creación del redex está dada por interacción hacia abajo (Figura 2.3).



(a) Caso I, con $M \to M'$

(b) Caso II, con $N \to N'$

Figura 2.2: Creación por interacción hacia arriba



(a) Caso III, con $M \to M'$

Figura 2.3: Creación por interacción hacia abajo

Si se permite que se contraigan redexes creados como en el caso III, esto es suficiente para que haya secuencias de reducciones infinitas. Por ejemplo, en $(\lambda^{\star} x.xx)\lambda x.xx \to \underline{(\lambda x.xx)\lambda x.xx}$, el redex subrayado está creado por interacción hacia abajo entre los términos. Si se permite su contracción, puede construirse inmediatamente una secuencia infinita de reducciones. Más aún, en el cálculo-λ se puede probar que sólo el caso III es el caso crítico, en el sentido de que es necesario que haya creación de redexes por interacción hacia abajo para construir una secuencia infinita de reducciones. Precisamente, los superdevelopments se definen permitiendo los casos I y II, y la relación que se obtiene es confluente y fuertemente normalizante [Acz78, vR93, vR96].

Igual que en el caso de los developments, es relativamente sencillo formular la relación de superdevelopment inductivamente, mediante un conjunto de reglas de inferencia, pero hacerlo como una secuencia de pasos de reducción es más complejo y requiere utilizar un esquema de etiquetas para evitar que se contraigan los redexes creados por el caso III. La definición de superdevelopments usando reducción etiquetada se tratará más adelante.

Dado que el objetivo del trabajo es dar una definición apropiada de la noción de superdevelopment en la variante débil del cálculo-λ, es indispensable estudiar primero las posibles maneras en las que se crean redexes nuevos en este cálculo.

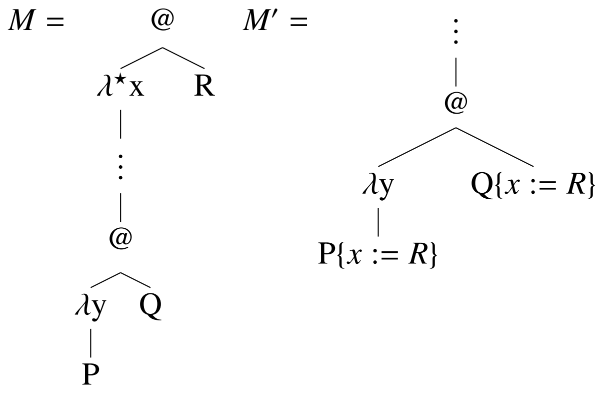
2.3. Caracterización de los redexes creados

En esta sección se caracteriza la creación de redexes en el cálculo-λ^w. Informalmente, es claro que los casos I, II y III del cálculo-λ siguen siendo maneras posibles de crear redexes en el cálculo-λ^w. La única diferencia es que, en el caso III, para que realmente se cree un redex es necesario que las variables libres de $(x\,Q)\{x := \lambda y.P\}$ no se encuentren ligadas por el contexto. (Notar que para esto basta con que el subtérmino $Q\{x := \lambda y.P\}$ no esté ligado por el contexto). Por otra parte, cuando la reducción es débil pueden crearse redexes de una nueva manera. Esto es porque, en el cálculo-λ^w, un subtérmino de la forma $(\lambda x.M)\,N$ no siempre es un redex, ya que para serlo debe ser compatible con el contexto en el que se encuentra. Un paso de reducción puede instanciar las variables de un subtérmino $(\lambda x.M)\,N$ de tal forma que pase a ser compatible con el contexto y por lo tanto un redex. Esto corresponde al caso IV (Figura 2.4).
Para llevar a cabo este análisis, se trabaja con una modificación del cálculo-λ^w en la cual algunos redexes pueden estar marcados, procediendo de manera análoga a la explicada en la sección anterior para el cálculo-λ. En el formalismo que se obtiene al agregar las marcas, el cálculo-$\lambda^w_\star$, sólo se permite la contracción de los redexes marcados. Las marcas permiten rastrear términos a lo largo de reducciones.

Definición 2.3.1 (Términos marcados)**.** El conjunto de términos marcados $\Lambda^\star$ y los contextos del cálculo-$\lambda^w_\star$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} M, N & ::= & x \mid M\,N \mid \lambda x.M \mid (\lambda^\star x.M)\,N \\ C & ::= & \Box \mid C\,N \mid M\,C \mid \lambda x.C \mid (\lambda^\star x.C)\,N \mid (\lambda^\star x.M)\,C \end{array}$$

El conjunto de posiciones y el *binding path* se definen de manera acorde. En lo que resta de esta sección, cuando se habla de "términos" se trata siempre de términos marcados, y lo mismo en



(a) Caso IV, con $M \to M'$

Figura 2.4: Creación por compatibilidad con el contexto, con $x \in \mathsf{fv}((\lambda y.P)\,Q)$

cuanto a los contextos. Si M es un término y $p \in \mathsf{pos}(M)$, se nota $\langle M, p\rangle$ al contexto que resulta de reemplazar el término en la posición p de M por un agujero. Si el agujero en C está en la posición p, se escribe $C[\,]_p$.

Como ya se mencionó, la reducción en el cálculo-$\lambda^w_\star$ es similar a la reducción en el cálculo-λ^w, salvo por el hecho de que sólo se permite la contracción de redexes marcados.

Definición 2.3.2 (Reducción en el cálculo-$\lambda^w_\star$)**.** La reducción sobre términos marcados se define mediante la siguiente regla:

$$\frac{\Delta = (\lambda^\star x.M)\,N \quad \mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C)}{C[(\lambda^\star x.M)\,N] \xrightarrow{\Delta} C[M\{x := N\}]}$$

El propósito del cálculo-$\lambda^w_\star$ es estudiar las situaciones en las cuales, partiendo de un término en el cual todos los redexes están marcados, la reducción produce términos con redexes sin marcar, es decir, con ocurrencias de subtérminos de la forma $(\lambda x.M)\,N$ en contextos compatibles. Esto modela la situación en la cual la reducción del cálculo-λ^w produce un redex que no es residuo de un redex ya presente en el término original. Como ya se mencionó, no todo subtérmino de la forma $(\lambda x.M)\,N$ es un redex en el cálculo-λ^w; para ser un redex debe ser además compatible con el contexto.

En primer lugar, se verá que esta manera de caracterizar los redexes creados mediante términos marcados se corresponde con la caracterización basada en posiciones mencionada en el contexto del cálculo-λ. Una vez hecho esto, se presentará el resultado principal de este capítulo.

La definición de *descendiente* en el cálculo-$\lambda^w_\star$ es una relación entre posiciones, similar a la dada para el cálculo-λ en la Definición 2.2.1:

Definición 2.3.3 (Descendiente en el cálculo-$\lambda^w_\star$)**.** Dado un paso de reducción $M \xrightarrow{\Delta} N$, se dice que una posición $q \in \mathsf{pos}(N)$ es *descendiente* de una posición $p \in \mathsf{pos}(M)$ en los siguientes casos:

1. Si la reducción es a la cabeza, $\Delta = (\lambda^{\star} x.P)\, Q \xrightarrow{\Delta} P\{x := Q\} = \Delta'$, entonces q es descendiente de p sii se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

   a) $q \in \mathsf{pos}(P)$ y $P|_q \neq x$ con $p = 0q$.

   b) $q = q_1 q_2$, $P|_{q_1} = x$ y $q_2 \in \mathsf{pos}(Q)$, con $p = 1q_2$.

2. Si la reducción es en un contexto, $M = C[\Delta] \xrightarrow{\Delta} C[\Delta'] = N$, con $C|_r = \Box$, entonces q es descendiente de p sii $p = rp'$, $q = rq'$, y q' es descendiente de p' en el paso de reducción $\Delta \to \Delta'$.

Notar que el único detalle que cambia, respecto de la Definición 2.2.1, es que en el caso 1.a) se pide $p = 0q$ (en lugar de $p = 00q$). Esto es porque en el cálculo-$\lambda^w_\star$ el término en la posición 0 de $(\lambda^\star x.P)Q$ es P y no $\lambda x.P$.

A partir de esta definición, las formalizaciones de *residuo* y *redex creado* son las mismas que en la Definición 2.2.2. Se puede verificar fácilmente que si $M \xrightarrow{\Delta} N$, para toda posición $q \in \mathsf{pos}(N)$ existe una única posición $p \in \mathsf{pos}(M)$ tal que q es descendiente de p. Además, todos los términos marcados en N son descendientes de términos marcados en M. Con el siguiente lema se justifica el uso de términos marcados para estudiar la creación de redexes en el cálculo-λ^w (la demostración se desarrolla en la Sección A.1):

Lema 2.3.4. Sean $M, N \in \Lambda^\star$ con $M \xrightarrow{\Delta} N$. Entonces $N|_q$ es de la forma $(\lambda^\star x.A)\, B$ si y sólo si q es descendiente de una posición $p \in M$ tal que $M|_p$ es de la forma $(\lambda^\star x.A')\, B'$.

A continuación se presentan las definiciones necesarias para caracterizar de qué maneras pueden crearse redexes en el cálculo-λ^w.

Definición 2.3.5 ($\lambda^w_\star$ y λ^w-redexes)**.** Sean $M, N, P \in \Lambda^\star$, $p \in \mathsf{pos}(M)$ y $M|_p$ compatible con $\langle M, p\rangle$.

- Si $M|_p = (\lambda^\star x.P)\, N$, se dice que $M|_p$ es un $\lambda^w_\star$*-redex* en la posición p de M.
- Si $M|_p = (\lambda x.P)N$, se dice que $M|_p$ es un λ^w*-redex* en la posición p de M.

Definición 2.3.6 (Términos inicialmente marcados en el cálculo-$\lambda^w_\star$)**.** Se dice que un término $M \in \Lambda^\star$ está *inicialmente marcado* sii todos los subtérminos marcados son efectivamente $\lambda^w_\star$-redexes y todos los subtérminos que corresponden a redexes del cálculo-λ^w están marcados (i.e. no hay λ^w-redexes). Más precisamente, sii se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\forall p \in \mathsf{pos}(M).M|_p = (\lambda^\star x.P)\, Q$ implica que $M|_p$ es un $\lambda^w_\star$-redex en la posición p de M.

2. $\forall p \in \mathsf{pos}(M).M|_p = (\lambda x.P)\, Q$ implica que $M|_p$ no es un λ^w-redex en la posición p de M.

Observación 2.3.7. Sea $M \xrightarrow{\Delta} N$ con M inicialmente marcado. Entonces:

- Todos los $\lambda^w_\star$-redexes en N son residuos de algún $\lambda^w_\star$-redex en M.
- Todos los λ^w-redexes en N son redexes creados.

Esto es consecuencia del Lema 2.3.4.

En la siguiente proposición, se muestra que en el cálculo-λ^w los redexes pueden crearse de y sólo de las cuatro maneras mencionadas en la introducción.

Proposición 2.3.8 (Creación de redexes). Sea $M \in \Lambda^\star$ inicialmente marcado, $M \xrightarrow{\Delta} N$ y $q \in \mathsf{pos}(N)$ tales que hay un λ^w-redex en la posición q de N. Entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones:

Caso I	$M = C[(\lambda^\star x.x)\,(\lambda y.P)\,Q]$	$N = C[(\lambda y.P)\,Q]_q$
Caso II	$M = C[(\lambda^\star x.(\lambda y.P))\,R\,Q]$	$N = C[(\lambda y.P')Q]_q$
donde	$P' = P\{x := R\}$	
Caso III	$M = C_1[(\lambda^\star x.C_2[x\,Q])\,\lambda y.P]$	$N = C_1[C_2'[(\lambda y.P)Q']_{q_2}]_{q_1}$
donde	$q = q_1 \cdot q_2$	
	$C_2' = C_2\{x := \lambda y.P\}$	
	$Q' = Q\{x := \lambda y.P\}$	
Caso IV	$M = C_1[(\lambda^\star x.C_2[(\lambda y.P)Q])\,R]$	$N = C_1[C_2'[(\lambda y.P')Q']_{q_2}]_{q_1}$
donde	$q = q_1 \cdot q_2$	
	$P' = P\{x := R\}$	
	$Q' = Q\{x := R\}$	
	$C_2' = C_2\{x := R\}$	
	$x \in \mathsf{fv}((\lambda y.P)\,Q)$	

La demostración se desarrolla en la Sección A.1, por análisis de casos de las posiciones relativas del redex que se contrae y el redex creado.

Ejemplo 2.3.9. Se ilustra cada uno de los casos. El $\lambda^w_\star$-redex subrayado a la izquierda es el que se contrae. El λ^w-redex de la derecha es el redex creado.

- **Caso I**: $\underline{(\lambda^\star x.x)\,(\lambda y.y)}\,z \to (\lambda y.y)\,z$
- **Caso II**: $\underline{(\lambda^\star x.\lambda y.x\,y)\,z}\,w \to (\lambda y.z\,y)\,w$
- **Caso III**: $\underline{(\lambda^\star x.x\,z)\,\lambda y.y} \to (\lambda y.y)\,z$
- **Caso IV**: $\underline{(\lambda^\star x.(\lambda y.y\,x)\,x)\,z} \to (\lambda y.y\,z)\,z$

En el capítulo siguiente, se introducirán dos formalizaciones de superdevelopments. La primera formalización, dada en la Sección 3.2, se basa en una relación de reducción sobre términos etiquetados. Las etiquetas se utilizan para distinguir entre residuos de redexes ya presentes en el término original, redexes creados por los casos I, II y IV, y redexes creados por el caso III. La segunda formalización se presenta en la Sección 3.6 y se basa en la definición inductiva de un juicio de reducción simultánea (*supersteps*).

3 Superdevelopments en el cálculo-λ^w

3.1. Introducción

En este capítulo se introducen dos formalizaciones de superdevelopments en el cálculo-λ^w: los superdevelopments débiles mediante reducción etiquetada (Sección 3.2), y los supersteps mediante reducción simultánea (Sección 3.6).

A modo de introducción, puede resultar ilustrativo considerar primero dos maneras posibles de definir, en el cálculo-λ usual, la relación de *development*. Como ya se mencionó, la idea es que un development es una reducción en la que sólo se contraen residuos de los redexes presentes en el término inicial.

Una manera posible de caracterizarlos estaría basada en términos marcados como los que se introdujeron en la Sección 2.3, utilizando una relación de reducción definida por la siguiente regla:

$$C[(\lambda^\star x.M)\,N] \to_d C[M\{x := N\}]$$

Un development sería cualquier secuencia de pasos de reducción partiendo de un término M en el que no hubiera subtérminos de la forma $(\lambda x.N_1)\,N_2$. Es decir, partiendo de un término en el que todos los redexes estuvieran marcados. Es claro que, con esa definición, en una reducción $M \twoheadrightarrow_d N$ sólo podrían contraerse residuos de los redexes presentes en M. Además, se trataría de un *development completo* si N estuviera en $\to_d$-forma normal.

Una segunda manera de formular la noción de development sería definiendo un juicio $M \Rightarrow N$ inductivamente sobre términos no marcados, con reglas como las siguientes:

$$\frac{}{x \Rightarrow x}\ \textsf{DevVar} \qquad \frac{M \Rightarrow M'}{\lambda x.M \Rightarrow \lambda x.M'}\ \textsf{DevAbs}$$

$$\frac{M \Rightarrow M' \quad N \Rightarrow N'}{M\,N \Rightarrow M'\,N'}\ \textsf{DevApp1} \qquad \frac{M \Rightarrow M' \quad N \Rightarrow N'}{(\lambda x.M)\,N \Rightarrow M'\{x := N'\}}\ \textsf{DevApp2}$$

Con esta definición, en un development $M \Rightarrow N$, también puede verse que sólo podrían contraerse residuos de los redexes originalmente presentes en M.

La noción de superdevelopments, tanto en el cálculo-λ como en el cálculo-λ^w, surge como generalización de los developments. Informalmente, en un superdevelopment, al igual que en un development, se permite contraer residuos de redexes presentes en el término inicial. Pero, además, se permite contraer algunos de los redexes creados. En el caso del cálculo-λ^w, se definirán los superdevelopments permitiendo contraer los redexes que hayan sido creados por los Casos I, II y IV de la Proposición 2.3.8, mientras que no se permitirá contraer los redexes creados por el Caso III.

Al igual que en el ejemplo de los developments, los superdevelopments en el cálculo-λ^w se formulan de dos maneras diferentes. La primera formulación está basada en términos etiquetados. Los términos etiquetados son más complejos que los términos marcados con los que se trabajó en la Sección 2.3, porque las etiquetas deben ser lo suficientemente expresivas como para diferenciar entre los redexes creados por los casos "buenos" (I, II y IV) y el caso "malo" (III). No es posible marcar directamente los redexes desde el comienzo, porque algunos redexes no están en el término inicial y se crean durante la reducción. En lugar de esto, se recurre a etiquetas que indican cuál es la abstracción que puede formar un redex con cada una de las aplicaciones.

La segunda formulación consiste en un juicio definido inductivamente sobre términos sin etiquetas. La complejidad de este juicio reside no tanto en diferenciar las varias maneras por las que se crean redexes, sino en el hecho de que el cálculo-λ^w es débil. El juicio debe estar definido de tal manera que sea posible contraer todos los redexes creados por el Caso IV sin que resulte demasiado laxo. Por ejemplo, considerar que no debería poder derivarse el siguiente juicio de superdevelopment en el cálculo-λ^w (tomando $I = \lambda y.y$):

$$\lambda x.\underline{I\,x} \Rightarrow \lambda x.x \tag{3.1}$$

porque el término subrayado contiene ocurrencias ligadas de x. Por otra parte, sí debería ser posible derivar el siguiente juicio:

$$(\lambda x.I\,x)\,z \Rightarrow z \tag{3.2}$$

La complejidad de caracterizar los superdevelopments en el cálculo-λ^w mediante un juicio de reducción simultánea es que no puede formularse una definición inductiva de manera directa. Si se permite derivar (3.1), la definición resulta demasiado laxa. Si no se permite derivar (3.1), tampoco es posible derivar (3.2) y la definición resulta demasiado restrictiva.

3.2. Reducción etiquetada

Se introduce primero el cálculo-λ^w etiquetado (cálculo-λ^w_ℓ). Se asume como dado un conjunto infinito numerable de *etiquetas* $\mathcal{L}$.

Definición 3.2.1 (Términos etiquetados)**.** Los términos etiquetados Λ_ℓ y los contextos están dados por la siguiente gramática:

$$\begin{array}{rcl} A, B & ::= & x \mid \lambda^a x.A \mid @(A^a, B) \\ C & ::= & \Box \mid \lambda^a x.C \mid @(C^a, B) \mid @(A^a, C) \end{array}$$

donde $x \in \mathcal{V}$ y $a \in \mathcal{L}$.

Se utiliza $\lambda^{a_1\dots a_n} x_1 \dots x_n.A$ (o simplemente $\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A$) como abreviatura de $\lambda^{a_1}x_1.\dots\lambda^{a_n}x_n.A$. Para destacar la abstracción más a la izquierda, se escribe $\lambda^{a\,\overline{a}^n}x\,\overline{x}^n.A$. En este cálculo, tanto las abstracciones como las aplicaciones están decoradas con etiquetas.

Informalmente, la definición de los términos etiquetados está motivada por la siguiente observación. La presencia de un redex en un término ocurre por la interacción entre una aplicación y una abstracción. Considérense un término A y, dentro de A, todas las aplicaciones y abstracciones *activas*, es decir aquellas que después de alguna cierta cantidad de pasos de reducción intervienen en el patrón de un redex (para alguna posible secuencia de reducciones). En el cálculo-λ, si se prohíbe la contracción de redexes creados por interacción "hacia abajo" o *downward* (Caso III), lo que ocurre es que hay una correspondencia biunívoca entre las aplicaciones activas y las abstracciones activas. Es decir, si M contiene una aplicación $N = N_1\,N_2$, hay a lo sumo *una* abstracción en M que puede eventualmente ocupar la cabeza de N. Inversamente, si M contiene una abstracción $N = \lambda x.N'$, hay a lo sumo una aplicación en M que puede eventualmente interactuar con N para formar un redex.

Por ejemplo, en la siguiente reducción:

$$\begin{aligned}
&\underline{(\lambda x.(\lambda x.x)\,(\lambda x.x))\,(\lambda x.x)}\,(\lambda^\star y.y)\,M\\
&\to \underline{(\lambda x.x)\,(\lambda x.x)}\,(\lambda^\star y.y)\,M\\
&\to \underline{(\lambda x.x)\,(\lambda^\star y.y)}\,M\\
&\to (\lambda^\star y.y)\,M
\end{aligned}$$

la abstracción marcada $\lambda^\star y.y$ llega a formar parte del patrón de un redex, por encontrarse a la cabeza de la aplicación más externa (aquella cuyo argumento es M). Pese a que en el término inicial hay varias aplicaciones y abstracciones, en toda posible secuencia de pasos de reducción, si se forma un redex en el que interviene $\lambda^\star$, en dicho redex interviene también la aplicación más externa. Inversamente, si en alguna secuencia de pasos de reducción se forma un redex en el que interviene la aplicación más externa, en él interviene también la abstracción marcada.

Esta afirmación de que hay una correspondencia biunívoca entre aplicaciones y abstracciones "activas" es una observación informal. Es oportuno mencionarla, pero la definición de reducción etiquetada no depende en absoluto de este hecho. Cuando se defina la noción de resultado de los superdevelopments completos de un término, en la Sección 4.2.1, se probará la unicidad de la definición, y en ese momento será necesario tratar con este hecho más formalmente. Lo que se verá, esencialmente, es que si $M \twoheadrightarrow \lambda x.M_1 = N_1$ y $M \twoheadrightarrow \lambda y.M_2 = N_2$, entonces N_1 y N_2 son descendientes del mismo subtérmino de M.

En la variante débil del cálculo-λ, ocurre algo similar cuando se prohíbe la contracción de los redexes creados por el caso III y se permite para los casos I, II y IV de la Proposición 2.3.8. Hecha esta observación, la intención detrás del cálculo-λ^w_ℓ es marcar los términos de tal manera que la etiqueta de una aplicación activa coincida con la etiqueta de la abstracción activa que le corresponde. Intuitivamente, puede pensarse que la etiqueta de una aplicación activa representa un "puntero" a aquella abstracción que eventualmente estará a la cabeza.

Desde el punto de vista técnico, la definición de términos etiquetados con la que se trabaja no impone condiciones tan fuertes. En particular, permite que cada aplicación esté asociada a varias abstracciones. Por ejemplo, en el término $@(@((\lambda^b x.\underline{\lambda^a y.y})^b, \lambda^a x.x)^a, B)$ hay dos ocurrencias de λ^a, aunque sólo la que está subrayada llegará a formar un redex.

En la definición de reducción etiquetada débil (dada formalmente más abajo), se prohibirá la creación de redexes por interacción *downward* mediante la imposición de ciertas condiciones sobre las etiquetas.

1. Para contraer un redex $@((\lambda^b x.A)^a, B)$, se requerirá que $a = b$.

2. Si un término A contiene una aplicación $B = @(B_1{}^a, B_2)$, se requerirá que la etiqueta a no figure en abstracciones fuera de B_1. Recurriendo nuevamente a la idea que motiva esta definición, esto sería que la abstracción "apuntada" provenga siempre del lado izquierdo de la aplicación y nunca desde afuera, es decir que la interacción sea *upward*.

La manera de trabajar formalmente con la segunda condición es considerando que las etiquetas en las aplicaciones son ligadores de las ocurrencias de las etiquetas en las abstracciones.

Por ejemplo, en el término $@(@((\underline{\lambda^b x.x})^b, \lambda^b x.x)^a, \lambda^b x.x)$ sólo la ocurrencia subrayada de b está ligada. Las otras dos ocurrencias están libres. De esta manera, los términos cumplen automáticamente la segunda condición.

El conjunto de etiquetas libres de un término etiquetado se define de la manera esperada:

$$\begin{aligned}
\mathsf{fl}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \\
\mathsf{fl}(\lambda^a x.A) &\stackrel{\text{def}}{=} \{a\} \cup \mathsf{fl}(A) \\
\mathsf{fl}(@(A^a, B)) &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathsf{fl}(A) \setminus \{a\}) \cup \mathsf{fl}(B)
\end{aligned}$$

Los términos etiquetados se consideran módulo renombre de etiquetas, mediante una relación de equivalencia similar a la α-conversión. Se asume la existencia de una etiqueta distinguida $\star \in \mathcal{L}$, que nunca se liga. Cada ocurrencia de $\star$ se considera una etiqueta diferente de todas las demás. Se nota $M^{\{-a\}}$ a la sustitución de todas las ocurrencias libres de a en M por $\star$. Se nota $@(A^\star, B)$ cuando la etiqueta es irrelevante (es decir, si no hay etiquetas ligadas dentro de la aplicación). Para no sobrecargar la notación, ocasionalmente se escribirá $A\, B$ en lugar de $@(A^\star, B)$ en los ejemplos. Además, $|A| \in \Lambda$ es el término que se obtiene al borrar todas las etiquetas de A (identificando $@(A, B)$ con $A\, B$). La sustitución sobre términos etiquetados se escribe $A\{x := B\}$. Notar que esta operación no debe capturar etiquetas. Por ejemplo, $@(x^a, x)\{x := \lambda^a y.y\} \neq @((\lambda^a y.y)^a, \lambda^a y.y)$. En tal caso, la ocurrencia ligadora de la etiqueta a en $@(x^a, x)$ debe renombrarse a $@(x^b, x)$ para que la sustitución permita obtener $@(x^b, x)\{x := \lambda^a y.y\} = @((\lambda^a y.y)^b, \lambda^a y.y)$. El *binding path* de un contexto etiquetado C es el binding path de $|C|$.

Observación 3.2.2. Otras caracterizaciones de superdevelopments que utilizan etiquetas no consideran a las aplicaciones como ligadores de etiquetas [vR93, vR96]. En lugar de esto, introducen la noción de buen etiquetado (*well-labeledness*): si una ocurrencia de una etiqueta a decora una aplicación y otra ocurrencia de a decora una abstracción, la abstracción debe ser subtérmino de alguno de los argumentos de la aplicación. En [vR93, vR96] se afirma que la reducción preserva el buen etiquetado, pero no está claro que esto sea cierto. Por ejemplo, tomando $M \stackrel{\text{def}}{=} @((\lambda^a x.x)^a, z)$, el paso de reducción:

$$\underline{@((\lambda^c x.@(x^b, x))^c, M)} \to @(M^b, M)$$

empieza en un término bien etiquetado pero produce un término que no está bien etiquetado. El término inicial está bien etiquetado porque λ^a ocurre una sola vez, y es subtérmino de la aplicación etiquetada con a. También se cumplen las condiciones sobre la abstracción etiquetada con c. Sin embargo, el hecho de que se produzcan dos copias de M ocasiona que la abstracción etiquetada con a en la ocurrencia izquierda de M no sea subtérmino de la aplicación etiquetada con a en la ocurrencia derecha de M.

El siguiente ejemplo es ligeramente más complejo pero muestra más claramente que la reducción no preserva el buen etiquetado. Tomando $M \stackrel{\text{def}}{=} @((\lambda^a x.\lambda^a y.y)^a, z)$, el término M está bien etiquetado de acuerdo con la definición de van Raamsdonk, porque las dos ocurrencias de λ^a están incluidas en una abstracción etiquetada con a. Puede construirse la siguiente secuencia de pasos de reducción para producir dos copias de M, siguiendo la misma idea que en el ejemplo anterior:

$$\underline{@((\lambda^c x.@(x^b, x))^c, M)} \to @(M^b, \underline{M}) \to @(M^b, \lambda^a y.y)$$

El término final claramente no está bien etiquetado, porque hay una ocurrencia "libre" de a mientras también hay una aplicación etiquetada con a en M.

La reducción en el cálculo-λ^w_ℓ se define a continuación. Se escribe $A \xrightarrow{L}_\ell B$, donde L es una secuencia de variables, cuando las variables libres del redex que se contrae no figuran en L. Además, por tratarse de reducción débil, el redex no puede contener variables que estén ligadas por el contexto en el que ocurre la contracción. Se llama *redex* a la ocurrencia de $@((\lambda^a x.A)^a, B)$.

Definición 3.2.3 (Reducción etiquetada)**.**

$$\frac{\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A)^a, B)) \uparrow \mathsf{bp}(C) \cup L}{C[@((\lambda^a x.A)^a, B)] \xrightarrow{L}_\ell C[A^{\{-a\}}\{x := B\}]}$$

Notar que el orden de las variables en L es irrelevante y por lo tanto se puede considerar directamente que se trata de un conjunto. Al contraer el redex, se sustituye a por $\star$ con el operador ${}^{\{-a\}}$ para que, al desaparecer la aplicación que liga a, desaparezcan también todas las ocurrencias previamente ligadas de a. En general, este es el comportamiento esperable de un ligador. Si no se sustituyera a por $\star$, podría ocurrir (indeseablemente) que, en un paso de reducción, alguna etiqueta ligada pasara a encontrarse libre, como en el siguiente ejemplo: $@((\lambda^a x.\lambda^a y.y)^a, w) \xrightarrow{L}_\ell \lambda^a y.y$. Si no se trabajara con términos respetando la convención de variables de Barendregt, también podría ocurrir que alguna etiqueta quedara ligada por un ligador distinto del original, como en: $@(\underline{@((\lambda^a x.\lambda^a y.y)^a, w)}^a, z) \xrightarrow{L}_\ell @((\lambda^a y.y)^a, z)$.

Se escribe $\to_\ell$ como abreviatura de $\xrightarrow{\emptyset}_\ell$. En el juicio $A \xrightarrow{L}_\ell B$ se asume implícitamente que $A, B \in \Lambda_\ell$.

Ejemplo 3.2.4. A continuación, se dan algunos ejemplos básicos de la reducción en el cálculo-λ^w_ℓ. Se ilustra de qué manera esta definición de reducción etiquetada permite la contracción de los redexes creados por los Casos I, II y IV de la Proposición 2.3.8 pero no por el Caso III:

1. $@((\lambda^a x.x)^a, y) \to_\ell y$
2. $@((\lambda^b x.x)^a, y) \not\to_\ell y$ porque las etiquetas no coinciden.
3. $\lambda^b y.\underline{@((\lambda^a x.x)^a, y)} \not\to_\ell \lambda^b y.y$ porque el subtérmino subrayado no es un redex, ya que contiene una y ligada.
4. $@((\lambda^a x.x)^a, y) \overset{y}{\not\to}_\ell y$ es similar al caso anterior. La contracción de un término que contenga una y está prohibida, aunque en este caso no es porque la y esté ligada en el contexto, sino porque se impone una restricción explícita en la relación $\xrightarrow{y}_\ell$.
5. Caso I: $@(\underline{@((\lambda^a x.x)^a, \lambda^b y.y)}^b, z) \to_\ell \underline{@((\lambda^b y.y)^b, z)} \to_\ell z$.
6. Caso II: $@(\underline{@((\lambda^a x.\lambda^b y.xy)^a, z)}^b, w) \to_\ell \underline{@((\lambda^b y.zy)^b, w)} \to_\ell zw$.
7. Caso III: $\underline{@((\lambda^a x.@(x^b, z))^a, \lambda^c y.y)} \to_\ell \underline{@((\lambda^c y.y)^b, z)} \not\to_\ell z$ porque las etiquetas no coinciden. Observar que las etiquetas nunca podrían coincidir, porque c es una etiqueta libre que no puede pasar a encontrarse ligada por la aplicación.
8. Caso IV: $@(\lambda^a x.\underline{@((\lambda^b y.y)^b, x)}^a, z) \not\to_\ell @((\lambda^a x.x)^a, z)$ porque el término subrayado no es un redex, dado que x está ligada en el contexto.

   Por otra parte, $\underline{@(\lambda^a x.@((\lambda^b y.y)^b, x)^a, z)} \to_\ell \underline{@((\lambda^b y.y)^b, z)} \to_\ell z$

Observación 3.2.5. $A \xrightarrow{L}_\ell B$ si y sólo si $A = C[\Delta] \to_\ell C[\Delta'] = B$ con $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C) \cup L$.

Más adelante se probará un resultado más general, que relaciona el conjunto de variables L de $\xrightarrow{L}_\ell$ con el contexto en el que ocurre la contracción del redex (Lema 3.5.4).

A continuación, se enuncia la definición de superdevelopment débil de un término sin etiquetas. La idea es que hay un superdevelopment de M a N si es posible decorar los términos con etiquetas de tal manera que pueda construirse una secuencia de pasos de reducción etiquetada entre los términos decorados. Para que haya un superdevelopment, se exige además que la versión decorada de M no tenga etiquetas repetidas. Más precisamente, se pide que esté *inicialmente etiquetado*, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 3.2.6. Un término $A \in \Lambda_\ell$ está *inicialmente etiquetado* sii todas sus abstracciones están decoradas con etiquetas distintas y ninguna de ellas es $\star$. Es decir:

- Si $\lambda^a x.B$ es subtérmino de A, $a \neq \star$.
- Para todo $p, q \in \mathsf{pos}(A)$ con $p \neq q$, si $A|_p = \lambda^a x.A_1$ y $A|_q = \lambda^b y.A_2$ entonces $a \neq b$.

Notar que no tendría sentido exigir condiciones sobre las etiquetas de las aplicaciones, porque estas ocurrencias son ligadoras, y por lo tanto son siempre distintas.

Definición 3.2.7. Sean $M, N \in \Lambda$. Hay un *superdevelopment débil* de M a N sii existen un término inicialmente etiquetado $A \in \Lambda_\ell$ y un término $B \in \Lambda_\ell$ tales que $|A| = M$, $|B| = N$ y $A \twoheadrightarrow_\ell B$. Si además B está en $\to_\ell$-forma normal, se dice que hay un superdevelopment débil *completo* de M a N.

3.3. Propiedades de la sustitución

A continuación se enuncian algunas propiedades de la sustitución que evita la captura de variables y de etiquetas. En general no se trabajará usando la definición puramente sintáctica de la sustitución, sino que se recurrirá a la convención de variables de Barendregt. Se procederá de manera similar con las etiquetas, considerando que las etiquetas ligadas están renombradas de tal modo que son distintas de las etiquetas libres y distintas entre sí, ya que esta es la práctica usual cuando se trabaja con ligadores. Las demostraciones de las propiedades se desarrollan en la Sección A.2.

Lema 3.3.1. $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A)^a, B)) \supseteq \mathsf{fv}(A^{\{-a\}}\{x := B\})$
Se reduce a las propiedades usuales de la sustitución, teniendo además en cuenta el hecho obvio de que $\mathsf{fv}(A^{\{-a\}}) = \mathsf{fv}(A)$.

Lema 3.3.2. $\mathsf{fl}(@((\lambda^a x.A)^a, B)) \supseteq \mathsf{fl}(A^{\{-a\}}\{x := B\})$

Lema 3.3.3. $A\{x := B\}^{\{-a\}} = A^{\{-a\}}\{x := B^{\{-a\}}\}$.

Una consecuencia obvia de este lema es que si $a \notin \mathsf{fl}(B)$, entonces $A\{x := B\}^{\{-a\}} = A^{\{-a\}}\{x := B\}$.

3.4. Finitud de los superdevelopments débiles

En esta sección se prueba que la reducción etiquetada es fuertemente normalizante. En principio esto no pasa de ser una observación, porque los superdevelopments débiles, definidos en la sección anterior, también son superdevelopments, y la normalización fuerte de los superdevelopments es un resultado ya conocido [vR93, vR96]. Sin embargo, el cálculo etiquetado a partir del cual se definen los superdevelopments en este trabajo es sutilmente distinto del propuesto por van Raamsdonk, porque, como se discutió en la Observación 3.2.2, en el cálculo-λ^w_ℓ las etiquetas de las aplicaciones son ligadores. Por este motivo, y por compleción, se prueba la finitud de los superdevelopments de una manera alternativa.

Para demostrar que $\to_\ell L$ es SN se recurre a una prueba directa. Se introduce la noción de *valor de replicación* de un término A, que, intuitivamente, es una cota superior para la longitud máxima de una secuencia de pasos de reducción etiquetada empezando en el término A. La definición es constructiva y se prueba con relativa facilidad que es compatible con $\xrightarrow{L}_\ell$. El procedimiento es similar al de la prueba directa de los developments dada por de Vrijer [dV85] en el marco del cálculo-λ. La complejidad adicional surge del hecho de que se trata de superdevelopments (más que del hecho de que la reducción es débil).

Para poder definir la noción de valor de replicación, es necesario definir primero otras dos funciones relacionadas, el *factor de replicación* de un contexto C, y el de un término A respecto de una variable x.

Se ve fácilmente que la prueba de la finitud de los superdevelopments en el cálculo-λ_ℓ^w que se da a continuación aplica también para los superdevelopments en el cálculo-λ, porque no se utilizan las propiedades específicas de la reducción débil. De todos modos se trabajará con los términos y definiciones del cálculo-λ_ℓ^w.

3.4.1. Factor de replicación

Las dos definiciones siguientes, factor de replicación de un contexto, $\textsc{rf}(C)$, y de un término respecto de una variable, $\textsc{rf}_x(A)$, están dadas por recursión mutua. Intuitivamente, el factor de replicación de un contexto C es una cota superior para el número de agujeros en cualquier posible superdevelopment débil del contexto (considerado como un término, donde $\Box$ es una variable). El factor de replicación de un término A respecto de una variable x es una cota superior para el número de ocurrencias (libres) de x en cualquier posible superdevelopment débil de A. Por ejemplo, en el siguiente superdevelopment:

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} @((\lambda^a x.xxx)^a, \underline{@((\lambda^b y.yy)^b, z)}) \\ &\to_\ell \underline{@((\lambda^a x.xxx)^a, zz)} \\ &\to_\ell zz(zz)(zz) \end{aligned}$$

se producen seis copias de z. No es difícil ver que en cualquier otro superdevelopment de A, la cantidad de ocurrencias de z nunca supera este número. El factor de replicación de A respecto de z es $\textsc{rf}_z(A) = 6$.

Definición 3.4.1. Factor de replicación de un contexto: $\textsc{rf}(C)$:

$$\begin{aligned} \textsc{rf}(\Box) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 \\ \textsc{rf}(\lambda^a x.C) &\stackrel{\text{def}}{=} \textsc{rf}(C) \\ \textsc{rf}(@(C^a, B)) &\stackrel{\text{def}}{=} \textsc{rf}(C) \\ \textsc{rf}(@(A^\star, C)) &\stackrel{\text{def}}{=} \textsc{rf}(C) \\ \textsc{rf}(@(A^a, C)) &\stackrel{\text{def}}{=} \textsc{rf}(C) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\textsc{rf}_x(B)\}, 1\}, \text{ donde } \lambda^a x.B \subseteq A \end{aligned}$$

La cuarta ecuación corresponde al caso en el que la aplicación nunca deviene un redex (las reducciones son internas) y no tiene asociada una abstracción. La quinta ecuación es el caso interesante. La idea es que, en un superdevelopment de $@(A^a, C)$, el agujero puede multiplicarse por dos razones:

1. por el superdevelopment interno de C,

2. por aplicación de la regla β. En ese caso, el agujero se multiplicará por la máxima cantidad de copias de la variable x que se puedan producir en el cuerpo de la abstracción $\lambda^a x.B$ que ocupe la cabeza del redex. Dado que en principio no se sabe cuál es la abstracción que ocupará la cabeza del redex, si hay más de una se toma el máximo.

Notar que si no hay abstracciones de la forma $\lambda^a x.B$ que sean subtérminos de A, corresponde la cuarta ecuación. Además, si las abstracciones $\lambda^a x.B \subseteq A$ no contienen ocurrencias de x, es decir $x \notin \mathsf{fv}(B)$, entonces $\textsc{rf}(@(A^a, C)) = \textsc{rf}(C) \cdot 1 = \textsc{rf}(C)$.

Definición 3.4.2. Factor de replicación de un término respecto de una variable: $\textsc{rf}_x(A)$:

$$\textsc{rf}_x(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \in \mathsf{pos}_x(A)} \textsc{rf}(\langle A, p \rangle)$$

Donde:

- $\mathsf{pos}_x(A)$ son las posiciones de A tales que $A|_p = x$;

- $\langle A, p \rangle$ es el contexto que resulta de insertar un agujero en la posición p de A.

Esta función generaliza a la anterior. La diferencia es que, mientras en un contexto el agujero ocurre una sola vez, x puede ocurrir varias veces en A. Es claro que $\textsc{rf}(C) = \textsc{rf}_\Box(C)$ y que $\textsc{rf}(C) > 0$. Alternativamente, se podría definir la noción de factor de replicación respecto de una variable directamente, sin utilizar recursión mutua. Notar que las funciones están bien definidas porque cuando $\textsc{rf}(A)$ se define en términos de $\textsc{rf}_x(A')$, el tamaño de A' es estrictamente menor que el tamaño de A. Cuando $\textsc{rf}_x(A)$ se define en términos de $\textsc{rf}(A')$, el tamaño de A' es a lo sumo el tamaño de A.

A continuación siguen algunos ejemplos:

- Si $A_1 = xxx$, entonces $\textsc{rf}_x(A_1) = 3$.

- Si $A_2 = @((\lambda^a x.xxx)^a, \Box)$, entonces $\textsc{rf}(A_2) = 3$.

- Si $A_3 = @((\lambda^a x.\Box)^a, y)$, entonces $\textsc{rf}(A_3) = 1$. El agujero se encuentra del lado izquierdo de una aplicación, y por lo tanto esa posición no se replica.

- Si $A_4 = @(@((\lambda^b x.x)^b, \lambda^a y.yy)^a, \Box)$, entonces $\textsc{rf}(A_4) = 2$.

3.4.2. Valor de replicación

El objetivo de la definición del factor de replicación es poder definir el valor de replicación, que es una cota superior para la cantidad de pasos de reducción etiquetada. Como tal, es una medida de la complejidad de un término. Además, la cota superior no es "grosera" en el sentido de que es compatible con $\xrightarrow{L}_{\ell}$ y por lo tanto constituye una prueba de que los superdevelopments son finitos.

La idea intuitiva del valor de replicación es la siguiente. La máxima cantidad de pasos de reducción que se pueden hacer en un superdevelopment débil, antes de llegar a una $\xrightarrow{L}_{\ell}$-forma normal, está dada por los redexes que hay en el término inicial. Una primera aproximación para encontrar una cota de la máxima cantidad de pasos, sería contar la cantidad de redexes en el término inicial, pero esto tiene dos problemas.

En primer lugar, contar redexes a secas no alcanza, porque en los superdevelopments pueden contraerse redexes creados, que no necesariamente figuraban en el término inicial. Una alternativa es contar la cantidad de aplicaciones. Esto puede ser una sobreestimación, pero resulta igualmente útil porque lo que se busca es una cota superior.

Incluso si se cuenta el número de aplicaciones, hay un segundo problema, más delicado, y es que contraer un redex puede causar que una aplicación se multiplique. Por ejemplo, si Δ es un redex, en el paso de reducción $@((\lambda^a x.xx)^a, \Delta) \to_{\ell} \Delta\Delta$ se duplica la cantidad de aplicaciones que haya en Δ. Claramente contar las aplicaciones que hay en el término inicial no es suficiente. Esto sugiere que lo que habría que hacer es contar la cantidad de aplicaciones, multiplicando por el máximo número de veces que se puede llegar a replicar a lo largo de un superdevelopment.

La máxima cantidad de veces que se puede llegar a replicar una aplicación es, a lo sumo, el factor de replicación del contexto en el que se encuentra. Este razonamiento motiva la definición de valor de replicación:

Definición 3.4.3. Valor de replicación de un término A.

$$\textsc{rval}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A)} \textsc{rf}(\langle A, p \rangle)$$

Donde:

- $\mathsf{posApp}(A)$ son las posiciones de A tales que $A|_p$ es una aplicación;
- $\langle A, p \rangle$ es el contexto que resulta de poner un agujero en la posición p de A.

El valor de replicación de un contexto C se define simplemente como el valor de replicación del término $C[z]$, donde z es una variable cualquiera que no ocurra en C.

3.4.3. Propiedades del factor y el valor de replicación

A continuación se enuncian y se justifican informalmente las propiedades relevantes de las funciones definidas anteriormente. Las demostraciones de las propiedades se desarrollan en el apéndice, Sección A.3.

Propiedad 3.4.4. $\textsc{rval}(x) = 0$
Es decir, en el superdevelopment de una variable no puede contraerse ningún redex. Esto es natural, ya que una variable está en $\xrightarrow{L}_\ell$-forma normal, y el único superdevelopment es una secuencia de 0 pasos de reducción.

Propiedad 3.4.5. $\textsc{rval}(\lambda^a x.A) = \textsc{rval}(A)$
La longitud máxima del superdevelopment de una abstracción es a lo sumo la longitud máxima del superdevelopment del cuerpo.

Propiedad 3.4.6. Si $A = @({A_1}^a, A_2)$, entonces $\textsc{rval}(A) =$
$= 1 + \textsc{rval}(A_1) + \textsc{rval}(A_2) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\textsc{rf}_x(B)\}, 1\}$ donde $\lambda^a x.B \subseteq A_1$
Dada una aplicación A, una cota superior para la máxima cantidad de redexes que pueden contraerse en un superdevelopment de A es a lo sumo:

- Un paso de reducción para la aplicación A (corresponde al caso en el que hay un redex en la raíz).
- La máxima cantidad de redexes que se pueden contraer en un superdevelopment de A_1.
- La máxima cantidad de redexes que se pueden contraer en un superdevelopment de A_2, multiplicada por la máxima cantidad de copias de A_2 que se puedan llegar a producir.

Propiedad 3.4.7. $\textsc{rf}(C_1[C_2]) = \textsc{rf}(C_1) \cdot \textsc{rf}(C_2)$
La máxima cantidad de copias de $\Box$ que se pueden producir en un superdevelopment de $C_1[C_2]$ corresponde a la cantidad de copias de $\Box$ que se produzcan como consecuencia del superdevelopment de C_2, multiplicada por la cantidad de copias de C_2 que se produzcan como consecuencia del superdevelopment de C_1.

Propiedad 3.4.8. Si $p \in \mathsf{posApp}(C)$, entonces $\textsc{rf}(\langle C, p\rangle) = \textsc{rf}(\langle C[A], p\rangle)$.
Instanciar el contexto no cambia el factor de replicación. Esta es una propiedad técnica, que se necesita para demostrar la propiedad siguiente.

Propiedad 3.4.9. $\textsc{rval}(C[A]) = \textsc{rval}(C) + \textsc{rf}(C) \cdot \textsc{rval}(A)$
En una cota superior para el superdevelopment más largo de $C[A]$, la cota superior para el superdevelopment más largo de A se multiplica por el factor de replicación de C, es decir la máxima cantidad de copias de A que pueden llegar a producirse.

Propiedad 3.4.10. $\textsc{rf}(C^{\{-b\}}\{x := A\}) = \textsc{rf}(C)$
Similar a la Propiedad 3.4.8, generalizada para sustituir una variable en un término, en lugar de instanciar un contexto.

Propiedad 3.4.11. $\textsc{rval}(A^{\{-b\}}\{x := B\}) = \textsc{rval}(A) + \textsc{rval}(B) \cdot \textsc{rf}_x(A)$
Similar a la Propiedad 3.4.9, generalizada para sustituir una variable en un término, en lugar de instanciar un contexto.

Propiedad 3.4.12. Si $A \xrightarrow{L}_\ell B$, entonces $\textsc{rval}(A) > \textsc{rval}(B)$.

Observación 3.4.13. Si $\text{RVAL}(A) = 0$, entonces A está en $\xrightarrow{L}_\ell$-forma normal. Esto es consecuencia directa de la propiedad anterior.

Notar que no vale la recíproca. Por ejemplo, el valor de replicación de $\lambda^\star y.@((\lambda^a x.x)^a, y)$ es 1, pero el término está en $\xrightarrow{L}_\ell$-forma normal para todo L.

Teorema 3.4.14. Los superdevelopments débiles son finitos.

Demostración. $\text{RVAL}()$ es compatible con $\xrightarrow{L}_\ell$ por Propiedad 3.4.12, de donde se desprende la normalización fuerte de $\xrightarrow{L}_\ell$. □

Observar que la misma demostración aplica para concluir la finitud de los superdevelopments (a secas), porque la prueba de Propiedad 3.4.12 no usa el hecho de que el redex que se contrae es disjunto de L y del binding path del contexto.

3.5. Propiedades de la reducción etiquetada

A continuación, se enuncian algunas propiedades adicionales de la reducción etiquetada. Las demostraciones se desarrollan en la Sección A.4. Por empezar, como es usual, la reducción no crea variables libres.

Lema 3.5.1. Si $A \xrightarrow{L}_\ell B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(B)$.

El siguiente lema afirma que, si se hace un paso de reducción $A \xrightarrow{L}_\ell B$, es decir prohibiendo la contracción de redexes con variables libres en L, el subconjunto de variables libres de A que está contenido en L es igual al subconjunto de variables libres de B que está contenido en L. Por el lema anterior es claro que en B no pueden aparecer variables que no estuvieran ya en A. Este lema afirma además que las variables que están en L nunca se borran. La justificación de esto es que si se contrae un redex de la forma $@((\lambda^a x.X)^a, Y)$, sólo pueden desaparecer las variables libres contenidas en el argumento Y (en el caso en el que $x \notin \mathsf{fv}(X)$). Pero dada una ocurrencia de una variable libre en A que también esté en L, esa ocurrencia nunca podrá estar dentro de Y, porque en tal caso la contracción del redex estaría prohibida. Por lo tanto, dichas variables no van a poder desaparecer.

Lema 3.5.2. Si $A \xrightarrow{L}_\ell B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \cap L = \mathsf{fv}(B) \cap L$.

Se analiza también de qué manera, en una reducción $A \xrightarrow{L}_\ell B$, el conjunto de variables prohibidas L puede debilitarse sacando variables de L, y fortalecerse extendiendo L con variables que no ocurran libres en A.

Lema 3.5.3. Sea $A \xrightarrow{L}_\ell B$.

1. Si $K \subseteq L$, entonces $A \xrightarrow{K}_\ell B$.

2. Si $K \uparrow \mathsf{fv}(A)$ entonces $A \xrightarrow{L \cup K}_{\ell} B$.

En cuanto a la relación entre la reducción y el contexto en el que ocurre el redex, se hace la siguiente observación.

Lema 3.5.4. Sea $A \to_{\ell} B$ un paso de reducción en el que se contrae un redex Δ. Entonces:

(1) $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow L$ si y sólo si $C[A] \to_{\ell} C[B]$ para todo contexto C tal que $\mathsf{bp}(C) = L$.

(2) $C_1[C_2[\Delta]] \xrightarrow{L}_{\ell} C_1[C_2[\Delta']]$ si y sólo si $C_2[\Delta] \xrightarrow{L \cup \mathsf{bp}(C_1)}_{\ell} C_2[\Delta']$, donde Δ' es el redex que se contrajo.

Como caso particular de (2), resulta especialmente importante la siguiente equivalencia: $\lambda^a x.A \xrightarrow{L}_{\ell} \lambda^a x.B$ si y sólo si $A \xrightarrow{x \cdot L}_{\ell} B$. Esta observación motiva la regla $\mathsf{Abs1}$ en la definición inductiva de superdevelopments que se presenta en la Sección 3.6.

Por último, se verá que la sustitución preserva la reducción. Para ello se prueba primero el siguiente lema:

Lema 3.5.5. Si $A \xrightarrow{L}_{\ell} B$, entonces $A^{\{-a\}} \xrightarrow{L}_{\ell} B^{\{-a\}}$.

Lema 3.5.6. Sean $A \xrightarrow{L}_{\ell} A'$ un paso de reducción y $B \in \Lambda_{\ell}$ de tal forma que $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Entonces $A\{x := B\} \xrightarrow{L}_{\ell} A'\{x := B\}$.

Los resultados de los lemas 3.5.1, 3.5.3, 3.5.5 y 3.5.6 pueden obviamente generalizarse también para reducción en muchos pasos. Las demostraciones son directas por inducción en la longitud de la reducción.

3.6. Reducción simultánea (*supersteps*)

Una manera alternativa de formalizar la noción de superdevelopments débiles es por medio de una relación de reducción simultánea. Esta relación tiene varias ventajas respecto de la reducción etiquetada. En primer lugar, satisface la propiedad del diamante, y por lo tanto se puede usar para demostrar la confluencia de la reducción etiquetada y del cálculo-λ^w (Teorema 4.5.4). Por otra parte, esta formalización evita tener que razonar acerca de reducciones a forma normal, ya que un paso de reducción simultánea es suficiente para obtener el superdevelopment de un término.

Para motivar la definición simultánea de superdevelopments, se introduce primero una versión incorrecta, como primer intento ingenuo de paralelizar la reducción etiquetada. Lo que se pretende, entonces, es definir una noción de reducción en la cual sea posible contraer simultáneamente varios redexes, permitiendo la contracción de los residuos (ya presentes en el término inicial), y también de los redexes creados por los casos I, II y IV de la Proposición 2.3.8, pero no los redexes creados por el caso III.

El juicio en cuestión se escribe $M \overset{L}{\Rightarrow} N$, donde L denota el binding path del contexto en el que el superdevelopment ocurre. Es decir, L representa un conjunto de variables ligadas en el contexto. Estas variables están prohibidas, en el sentido de que no se permite contraer un redex que contenga variables en L.

Definición 3.6.1 (Variante "ingenua" de los supersteps). El juicio $M \overset{L}{\Rightarrow} N$ se define inductivamente de la siguiente manera:

$$\frac{}{x \overset{L}{\Rightarrow} x}\ \mathsf{SdVar} \qquad \frac{M \overset{x \cdot L}{\Rightarrow} M'}{\lambda x.M \overset{L}{\Rightarrow} \lambda x.M'}\ \mathsf{SdAbs}$$

$$\frac{M \overset{L}{\Rightarrow} M' \quad N \overset{L}{\Rightarrow} N'}{M\,N \overset{L}{\Rightarrow} M'\,N'}\ \mathsf{SdApp1}$$

$$\frac{M \overset{L}{\Rightarrow} \lambda x.M' \quad N \overset{L}{\Rightarrow} N' \quad \mathsf{fv}((\lambda x.M')\,N') \uparrow L}{M\,N \overset{L}{\Rightarrow} M'\{x := N'\}}\ \mathsf{SdApp2}$$

Comparar con la definición de developments dada al comienzo de la Sección 3. El problema de esta definición es que la condición $\mathsf{fv}((\lambda x.M')\,N') \uparrow L$, combinada con la regla SdAbs, resulta ser demasiado restrictiva.

Concretamente, la regla SdAbs, mirada desde abajo hacia arriba, prohíbe que se contraigan redexes en los que haya ocurrencias libres de x. Pero podría ocurrir que en un paso posterior de la derivación la abstracción $\lambda x.M$ contribuya al patrón de un redex, se aplique la regla β, y que la sustitución provoque que las ocurrencias previamente ligadas de x pasen a ser términos no ligados por el contexto. En casos como ese, uno querría que *sí* sea posible contraer los redexes que contengan ocurrencias libres de x.

Por ejemplo, en el cálculo-λ^w, el siguiente no es un paso de reducción válido:

$$M = (\lambda x.\underline{I\,x})\,y \not\to (\lambda x.x)\,y \tag{3.3}$$

porque el subtérmino subrayado contiene una ocurrencia ligada de x. Por otra parte, el siguiente sí es superdevelopment válido:

$$M = \underline{(\lambda x.I\,x)\,y} \to \underline{I\,y} \to y \tag{3.4}$$

De acuerdo con (3.4), se debería poder derivar el juicio $(\lambda x.I\,x)\,y \overset{L}{\Rightarrow} y$. Para deducirlo usando SdApp2, sería necesario derivar $\lambda x.I\,x \overset{L}{\Rightarrow} \lambda x.x$, pero esto requeriría que sea posible contraer $I\,x$ en un contexto ligado, y contradiría (3.3).

La esencia del problema de la definición que se acaba de presentar es, entonces, que la contracción de x bajo un contexto en el que x está ligada debe permitirse en algunos casos y no en otros. Más precisamente, debe permitirse si la abstracción que liga a x se usa en un paso posterior de la derivación, y debe prohibirse en caso contrario.

Es importante observar además que, dado que se quiere permitir la contracción de los redexes creados por el Caso II, puede ser necesario meterse en varios niveles de abstracciones anidadas antes de usarlas. Por ejemplo, el siguiente es un superdevelopment válido en el cálculo-λ^w:

$$\begin{aligned} &(\lambda x.\lambda y.\lambda z.M)\, N_1\, N_2 \\ &\to (\lambda y.\lambda z.M')\, N_2 \\ &\to \lambda z.M'' \end{aligned}$$

Por lo tanto, en la versión inductiva, cuando se determine el juicio para el superdevelopment de M, debería ocurrir que la contracción de subtérminos con ocurrencias de x e y esté permitida, pero la contracción de subtérminos con ocurrencias de z esté prohibida.

Observación 3.6.2. En versiones preliminares de este trabajo, se utilizó una definición en la que se mantenía, además del conjunto L de variables prohibidas, un segundo conjunto K de variables explícitamente permitidas. Se modificaba la restricción de la regla SdApp2, pidiendo que las variables libres del término en cuestión fueran disjuntas de $L \setminus K$. Si bien la idea detrás de esta definición era correcta y esencialmente la misma que la que se presenta a continuación, tenía el problema de que en el momento en el que se agregaban variables al conjunto K, estas se encontraban todavía ligadas, y esto requería mayor cuidado en el uso de la convención de variables.

La formulación que se presenta a continuación no se refiere a las variables ligadas por su nombre. En lugar de eso, se basa en que las abstracciones que se pueden usar en pasos posteriores de la derivación son siempre las más externas. Para indicar cuáles son las variables que *no* deben estar prohibidas, en lugar de referirse a ellas por el nombre, se indica cuántas son con un número natural k. No puede haber ambigüedad porque las variables permitidas son siempre las ligadas por las k abstracciones más externas.

En resumen, se estudia un juicio extendido $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$ en el que el número $k \geq 0$ indica cuántas abstracciones de M se espera que contribuyan a un redex en alguna instancia posterior de la derivación. Se permite la contracción de redexes ligados por cualquiera de estas k abstracciones.

Definición 3.6.3. Sean $M, N \in \Lambda$, $L \subseteq \mathcal{V}$ y $k \geq 0$. Se dice que hay un *superstep débil* de M a N *bajo* L, k si y sólo si $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$, donde el juicio se define inductivamente de la siguiente manera:

$$\frac{}{x \overset{L,0}{\Rightarrow} x}\ \mathsf{Var}$$

$$\frac{M \overset{x \cdot L,0}{\Rightarrow} M'}{\lambda x.M \overset{L,0}{\Rightarrow} \lambda x.M'}\ \mathsf{Abs1} \qquad \frac{M \overset{L,k}{\Rightarrow} M'}{\lambda x.M \overset{L,k+1}{\Rightarrow} \lambda x.M'}\ \mathsf{Abs2}$$

$$\frac{M \overset{L,0}{\Rightarrow} M' \quad N \overset{L,0}{\Rightarrow} N'}{MN \overset{L,0}{\Rightarrow} M'N'}\ \mathsf{App1}$$

$$\frac{M \overset{L,n+1}{\Rightarrow} \lambda x.M' \quad N \overset{L,m}{\Rightarrow} N' \quad \mathsf{fv}((\lambda x.M')N') \uparrow L \quad m > 0 \Rightarrow M' = \lambda \overline{x}^n.x}{MN \overset{L,n+m}{\Rightarrow} M'\{x := N'\}}\ \mathsf{App2}$$

Además, hay un superstep débil *completo* de M a N bajo L, k si en la derivación del juicio $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$ se utiliza la regla App1 sólo cuando no se puede aplicar la regla App2.

Un primer comentario sobre la definición es que el superdevelopment de una abstracción bajo L, k tiene dos casos. La regla Abs1 corresponde al caso en el que $k = 0$. En ese caso se trata de una abstracción que no va a contribuir a la cabeza de un redex en un paso posterior de la derivación. El esquema de inferencia es similar al de la regla SdAbs de la definición ingenua, en cuanto a que se agrega x al conjunto de variables prohibidas. La regla Abs2 corresponde al caso en el que $k > 0$, es decir que se trata de una abstracción que *sí* va a ser utilizada en algún paso posterior. En ese caso, x no se agrega al conjunto de variables prohibidas. La diferencia entre estas dos reglas resuelve el problema que tenía la definición incorrecta dada anteriormente. Notar que al definir el superstep completo se requiere que se use la regla App2 siempre que sea posible, pero no es necesario exigir algo similar sobre las reglas Abs1 y Abs2 porque, miradas de abajo hacia arriba, son mutuamente excluyentes.

Por otro lado, en un juicio $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$, la intención es que sea siempre cierto que N sea de la forma $\lambda x_1 \ldots x_k.N'$. Esto es porque se espera usar, en pasos posteriores, las k abstracciones más externas de N. Es por eso que $k = 0$ en la conclusión de la regla App1: porque el término de la derecha es una aplicación, y por lo tanto comienza con 0 abstracciones. Por este mismo motivo $k = 0$ en la regla Var. En las hipótesis de la regla App1, también $k = 0$, porque los términos M' y N' van a pasar a encontrarse contenidos en una aplicación que nunca contribuye a un redex, y por lo tanto las abstracciones de M' y N' nunca van a poder llegar a formar parte del patrón de un redex que se contraiga, porque nunca van a ser las más externas.

La regla App2, que es la más compleja, lo que dice, esencialmente, es que si $M'\{x := N'\}$ es de la forma $\lambda x_1 \ldots x_{n+m}.P$, con $n + m$ abstracciones en la raíz, esto puede ser por una de las dos razones siguientes:

(1) $m = 0$ y $M' = \lambda x_1 \ldots x_n.M''$.

(2) $m > 0$, $M' = \lambda x_1 \ldots x_n.x$ y $N' = \lambda x_{n+1} \ldots x_{n+m}.P$.

La condición que exige que las variables libres sean disjuntas del contexto es exactamente la misma que la dada en versión “ingenua”, en la regla SdApp2. La condición adicional, $m > 0 \Rightarrow M' = \lambda\overline{x}^n.x$, es para garantizar que M' tenga la forma correcta si se trata del caso (2). Notar además que en el superstep $M \overset{L,n+1}{\Rightarrow} \lambda x.M'$ se utiliza $n + 1$ en lugar de n, porque debe estar permitido contraer subtérminos que contengan ocurrencias de x, y también subtérminos ligados por cualquiera de las n abstracciones que se encuentran en la raíz de M', y que se van a utilizar en instancias posteriores de la derivación.

Ejemplo 3.6.4. A continuación se dan ejemplos de la reducción simultánea. Comparar con el Ejemplo 3.2.4. y observar que efectivamente se permite que se contraigan los redexes creados por los Casos I, II y IV de la Proposición 2.3.8 pero no los creados por el Caso III. Se muestran solamente las aplicaciones de las reglas más interesantes y relevantes para no sobrecargar las derivaciones.

1. Superstep válido:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} x}\,\mathsf{Var}}{\lambda x.x \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow} \lambda x.x}\,\mathsf{Abs2} \qquad \dfrac{}{y \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} y}\,\mathsf{Var}}{(\lambda x.x)\, y \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} y}\,\mathsf{App2}$$

2. Superstep inválido, no es derivable:

$$\dfrac{\dfrac{\lambda x.x \overset{\{y\},1}{\Rightarrow} \lambda x.x \qquad y \overset{\{y\},0}{\Rightarrow} y \qquad \text{pero } \mathsf{fv}((\lambda x.x)\, y) \not\uparrow \{y\}}{(\lambda x.x)\, y \not\Rightarrow \{y\}, 0 y}\,\mathsf{App2}}{\lambda y.(\lambda x.x)\, y \not\Rightarrow \emptyset, 0 \lambda y.y}\,\mathsf{Abs1}$$

3. Caso I:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\lambda x.x \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow} \lambda x.x = P}\,\mathsf{Abs2} \qquad \dfrac{\dots}{\lambda y.y \overset{\emptyset,m=1}{\Rightarrow} \lambda y.y}\,\mathsf{Abs2}}{(\lambda x.x)\, (\lambda y.y) \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow} \lambda y.y}\,\mathsf{App2}}{(\lambda x.x)\, (\lambda y.y)\, z \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} z}\,\mathsf{App2}$$

   Observar que en este caso $m > 0$ y se cumple $P = \lambda x.x$.

4. Caso II:

$M \to N$	reducción débil a secas (Definición 1.2.8)
$A \to_\ell B$	reducción débil sobre términos etiquetados (equivalente a $A \overset{\emptyset}{\to}_\ell B$)
$A \overset{L}{\to}_\ell B$	reducción débil sobre términos etiquetados (Definición 3.2.3) los redexes no pueden contener variables en L
$M \overset{L}{\Rightarrow} N$	definición tentativa de los supersteps (no funciona en general)
$M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$	*supersteps*, reducción simultánea (Definición 3.6.3)

Cuadro 3.1: Resumen de las definiciones introducidas

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{x\,y \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} x\,y}\,\text{App1}}{\lambda y.x\,y \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow} \lambda y.x\,y}\,\text{Abs2}}{\lambda x.\lambda y.x\,y \overset{\emptyset,2}{\Rightarrow} \lambda x.\lambda y.x\,y}\,\text{Abs2}}{(\lambda x.\lambda y.x\,y)\,z \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow} \lambda y.z\,y}\,\text{App2}}{(\lambda x.\lambda y.x\,y)\,z\,w \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} z\,w}\,\text{App2}$$

5. Caso III:

$$\dfrac{\dfrac{x\,z \not\Rightarrow \emptyset, 0z}{\lambda x.x\,z \not\Rightarrow \emptyset, 1z}\,\text{Abs2} \qquad \dfrac{}{z \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} z}\,\text{Var}}{(\lambda x.x\,z)\,\lambda y.y \not\Rightarrow \emptyset, 0z}\,\text{Abs2}$$

6. Caso IV:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots}{\lambda y.y \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} \lambda y.y}\,\text{Abs1}}{(\lambda y.y)\,x \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} x}\,\text{App2}}{\lambda x.(\lambda y.y)\,x \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow} \lambda x.x}\,\text{Abs2}}{(\lambda x.(\lambda y.y)\,x)\,z \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} z}\,\text{App2}$$

En el Cuadro 3.1 se resumen las relaciones de reducción y los juicios introducidos hasta el momento. En el capítulo siguiente, se probará que las dos nociones de superdevelopments presentadas son equivalentes. La mayor parte de las propiedades relevantes de los juicios $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$ se estudiará a partir de la Sección 4.2, cuando se introduzca un juicio relacionado $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, definido sobre términos etiquetados.

4 Equivalencia de las presentaciones

4.1. Introducción

En este capítulo se demuestra la equivalencia de las dos presentaciones de superdevelopments que se introdujeron en la sección anterior: los superdevelopments débiles de la Definición 3.2.7 y los supersteps débiles de la Definición 3.6.3.

Usando la notación M_ℓ para denotar alguna versión etiquetada de M, (i.e. $M_\ell \in \Lambda_\ell$, $M \in \Lambda$ y $|M_\ell| = M$), lo que se demostrará es el siguiente resultado (el primer ítem en la Sección 4.4, y el segundo en la Sección 4.5):

Teorema 4.1.1. Sean $M, N \in \Lambda$ y $L \subseteq \mathcal{V}$. Entonces:

1. Si $M \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} N$, entonces existen M_ℓ, N_ℓ, con M_ℓ inicialmente etiquetado, tales que $M_\ell \twoheadrightarrow_\ell N_\ell$.
2. Si $M_\ell \twoheadrightarrow_\ell N_\ell$, con M_ℓ inicialmente etiquetado y N_ℓ en $\rightarrow_\ell$-forma normal, entonces $M \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} N$.

Es decir, si hay un superstep de M a N, entonces hay un superdevelopment débil de M a N. Por otro lado, si hay un superdevelopment débil completo de M a N, entonces hay un superstep de M a N.

En versiones preliminares de este trabajo, en las que las aplicaciones no se consideraban ligadores de etiquetas, era necesario exigir que los términos etiquetados M_ℓ y N_ℓ cumplieran con una propiedad de buen etiquetado para que el segundo ítem fuera verdadero. Lo mismo ocurre en van Raamsdonk [vR93].

En nuestro caso, es tácito (pero imprescindible) el hecho de que las etiquetas en las aplicaciones sean ligadores de las etiquetas en las abstracciones. Por ejemplo, si las aplicaciones no fueran ligadores, podría obtenerse la siguiente secuencia de pasos de reducción:

$$@(\lambda^b x.@(x^a, y)^b, \lambda^a z.z) \rightarrow_\ell \underline{@((\lambda^a z.z)^a, y)} \rightarrow_\ell y$$

Esto sería indeseable, porque se estaría permitiendo la contracción del término subrayado, que es un redex creado por el Caso III de la Proposición 2.3.8. Como ya se observó en el Ejemplo 3.2.4 (7) y en el Ejemplo 3.6.4 (5), esto no es un superdevelopment válido.

El requerimiento de que N_ℓ esté en $\rightarrow_\ell$-forma normal está justificado por la siguiente observación, donde Δ es algún redex tal que $\Delta \rightarrow_\ell \Delta'$:

$$@((\lambda^a x.@(x^b, x))^a, \Delta) \rightarrow_\ell @(\Delta^b, \Delta) \rightarrow_\ell @(\Delta'^b, \Delta)$$

Es claro que el término todavía no está en $\to_\ell$-forma normal, y que la reducción etiquetada tiene trabajo por hacer: queda un redex etiquetado Δ sin reducir. Es decir, la secuencia de pasos de reducción constituye un superdevelopment débil *incompleto*. En cuanto a la reducción simultánea, el siguiente juicio no es derivable:

$$@((\lambda^a x.@(x^b, x))^a, \Delta) \not\Rightarrow \emptyset, 0 @(\Delta'^b, \Delta)$$

En cambio, si se sigue aplicando la reducción etiquetada hasta llegar a una $\to_\ell$-forma normal:

$$\ldots \to_\ell @(\Delta'^b, \Delta) \to_\ell @(\Delta'^b, \Delta')$$

es posible derivar el correspondiente juicio de reducción simultánea:

$$@((\lambda^a x.@(x^b, x))^a, \Delta) \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} @(\Delta'^b, \Delta')$$

En la Sección 4.2 se define un juicio auxiliar $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, que corresponde a los supersteps sobre términos etiquetados, y además un término $A^*_{L,k}$ asociado a A, que corresponde al resultado de calcular el superdevelopment débil completo de A. En la Sección 4.3 se definen los términos (L, k)-etiquetados y se prueban ciertas propiedades de los supersteps etiquetados. En la Sección 4.4 se demostrará el primer ítem del Teorema 4.1.1, y el segundo en la Sección 4.5.

4.2. Reducción simultánea etiquetada

Como ya se mencionó, el objetivo es relacionar la reducción etiquetada *a $\to_\ell$-forma normal* con la definición de superdevelopments por reducción simultánea (supersteps). Para poder hacer esto, se introduce un formalismo intermedio: el de los supersteps débiles por reducción simultánea *sobre términos etiquetados*, $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$. Se procede de este modo porque cuando se parte de pasos de reducción $\to_\ell$ y se construyen juicios de $\overset{L,k}{\Rightarrow}$, se pierde el control sobre las etiquetas y por lo tanto sobre la $\to_\ell$-forma normal, que es la manera de caracterizar a los superdevelopments débiles completos en la reducción etiquetada.

En resumen, en la Sección 4.4, cuando se relacione $\overset{L,k}{\Rightarrow}$ con $\twoheadrightarrow_\ell$, se irá primero de $\overset{L,k}{\Rightarrow}$ a $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$ (definida a continuación) y después de $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$ a $\twoheadrightarrow_\ell$. Inversamente, en la Sección 4.5, se irá primero de $\twoheadrightarrow_\ell$ a $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$ y recién entonces a $\overset{L,k}{\Rightarrow}$.

Definición 4.2.1 (Supersteps débiles simultáneos sobre términos etiquetados). Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ y $L \subseteq \mathcal{V}$. Se dice que hay un superstep débil simultáneo de A a B bajo L, k si y sólo si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, donde este juicio se define de la siguiente manera:

$$\frac{}{x \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} x} \textsf{LVar}$$

$$\frac{A \overset{x \cdot L,0}{\Rightarrow}_{\ell} A'}{\lambda^a x.A \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} \lambda^a x.A'} \textsf{LAbs1} \qquad \frac{A \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} A'}{\lambda^a x.A \overset{L,k+1}{\Rightarrow}_{\ell} \lambda^a x.A'} \textsf{LAbs2}$$

$$\frac{A \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} A' \quad B \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} B'}{@(A^a, B) \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} @(A'^a, B')} \textsf{LApp1}$$

$$\frac{A \overset{L,n+1}{\Rightarrow}_{\ell} \lambda^a x.A' \quad B \overset{L,m}{\Rightarrow}_{\ell} B' \quad \mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A')^a, B')) \uparrow L \quad m > 0 \Rightarrow A' = \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.x}{@(A^a, B) \overset{L,n+m}{\Rightarrow}_{\ell} A'^{\{-a\}}\{x := B'\}} \textsf{LApp2}$$

Notar que, obviando las diferencias notacionales, esta definición es esencialmente una copia de la Definición 3.6.3. La única diferencia es que, en esta nueva definición, en la regla LApp2 se exige que la etiqueta de la abstracción que contribuye al redex coincida con la etiqueta de la correspondiente aplicación.

A continuación se enuncian algunas propiedades básicas de $\overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell}$. Las demostraciones se desarrollan en la Sección A.5.

Propiedad 4.2.2 ($\overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell}$ es reflexiva)**.** $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} A$.

Es natural que $\overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell}$ sea reflexiva, porque un superstep es una relación de reducción simultánea, en la que se contraen algunos de los redexes presentes en el término original, y algunos de los redexes creados. El superstep $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} A$ corresponde al caso de una redución en la que no se contrae ningún redex. Se deriva este juicio usando siempre las reglas LAbs1 y LApp1, y nunca LAbs2 o LApp2. Por otra parte, notar que $\overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell}$ no es reflexiva cuando $k > 0$, porque en un juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} B$ se espera que B tenga k abstracciones en la raíz, que son las que se van a usar en pasos posteriores de la derivación. Es claro, por ejemplo, que $x \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} x$ no puede derivarse cuando $k > 0$.

Se cumplen también las propiedades esperables sobre las variables y las etiquetas libres:

Propiedad 4.2.3. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fl}(A) \supseteq \mathsf{fl}(B)$.

El siguiente lema afirma que si se tiene un superstep en un contexto en el que las variables en L están prohibidas, es decir que no pueden contraerse redexes con ocurrencias de variables libres en L, puede derivarse el mismo juicio en un contexto menos restrictivo $L' \subseteq L$.

Lema 4.2.4. Si $L' \subseteq L$ y $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} B$, entonces $A \overset{L',k}{\Rightarrow}_{\ell} B$.

La siguiente propiedad afirma que un superstep débil bajo L, k deja k abstracciones en la raíz del término.

Lema 4.2.5. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces existen variables x_i y etiquetas a_i, con $1 \leq i \leq k$, y un término $B' \in \Lambda_\ell$ tales que $B = \lambda^{a_1 \ldots a_k} x_1 \ldots x_k.B'$.

4.2.1. Resultado de los superdevelopments completos

Como herramienta adicional para probar la equivalencia de las dos definiciones, se utilizará también la siguiente noción de *resultado de los superdevelopments débiles completos*. Corresponde a una definición inductiva de la forma normal de la reducción etiquetada ($A^*_{L,0}$ es la $\overset{L}{\to}_\ell$-forma normal de A). También es equivalente a un superstep en el que se aplica la regla $\mathsf{LApp1}$ sólo cuando no es posible aplicar la regla $\mathsf{LApp2}$.

Definición 4.2.6 (Resultado de los superdevelopments débiles completos)**.** Sea $A \in \Lambda_\ell$, $L \subseteq \mathcal{V}$ y $k \geq 0$. Se define el *resultado de los superdevelopments débiles completos* de A bajo L, k, escrito $A^*_{L,k}$, por inducción en A, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcl}
x^*_{L,0} & \overset{\text{def}}{=} & x \\
(\lambda^a x.A)^*_{L,0} & \overset{\text{def}}{=} & \lambda^a x.A^*_{x \cdot L,0} \\
(\lambda^a x.A)^*_{L,k+1} & \overset{\text{def}}{=} & \lambda^a x.A^*_{L,k} \\
@(A^a, B)^*_{L,k} & \overset{\text{def}}{=} & \begin{cases} A'^{\{-a\}}\{x := B'\}, & \text{si } (\star) \\ @({A^*_{L,0}}^a, B^*_{L,0}), & \text{si no } (\star) \text{ y } k = 0 \end{cases}
\end{array}
$$

donde $(\star)$ es la siguiente condición: existen $n, m \geq 0$ tales que:

1. $n + m = k$
2. $A^*_{L,n+1} = \lambda^a x.A'$
3. $B^*_{L,m} = B'$
4. Si $m > 0$, entonces $A' = \lambda^{a_1 \ldots a_n} x_1 \ldots x_n.x$.
5. $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A')^a, B')) \uparrow L$.

Si se cumple la condición $(\star)$ para una aplicación $@(A^a, B)$ bajo L, k, se dice que $@(A^a, B)$ es *(L, k)-aplicable*.

Observación 4.2.7. Una primera observación es que $A^*_{L,k}$ no necesariamente existe. Por ejemplo, $@(x^a, y)^*_{L,1}$ está indefinido para cualquier L, porque el superdevelopment débil de $@(x^a, y)$ no produce una abstracción. Observar que $A^*_{L,0}$ siempre existe. En general, si $A^*_{L,k}$ está definido, entonces existen variables x_i y etiquetas a_i, con $1 \leq i \leq k$ y un término $A' \in \Lambda_\ell$ tales que $A^*_{L,k} = \lambda^{a_1 \ldots a_k} x_1 \ldots x_k.A'$.

Ejemplo 4.2.8. Siguen algunos ejemplos básicos de esta definición:

1. $@((\lambda^a x.x)^a, y)^*_{\emptyset,0} = y$ pues:
   $(\lambda^a x.x)^*_{\emptyset,1} = \lambda^a x.x^*_{\emptyset,0} = \lambda^a x.x$
   $y^*_{\emptyset,0} = y$

2. $@((\lambda^a x.x\,x)^a, A)^*_{L,0} = A^*_{L,0}\,A^*_{L,0}$

3. $(\lambda^b y.@((\lambda^a x.x)^a, y))^*_{\emptyset,0} = \lambda^b y.@((\lambda^a x.x)^a, y)^*_{\{y\},0} = \lambda^b y.@((\lambda^a x.x)^a, y)$, observar que la aplicación no puede contraerse porque contiene una ocurrencia de y ligada.

4. $(\lambda^b y.@((\lambda^a x.x)^a, y))^*_{\emptyset,1} = \lambda^b y.@((\lambda^a x.x)^a, y)^*_{\emptyset,0} = \lambda^b y.y$, observar que en este caso la contracción de términos con ocurrencias de y no está prohibida porque se espera usar la abstracción más externa.

A continuación lo que se probará es que el resultado de los superdevelopments completos está bien definido, es decir que si $A^*_{L,k}$ existe, es único. Notar que esto no es obvio, porque en principio podría haber más de un valor de n, m que haga que una aplicación $@(A^a, B)$ sea (L, k)-aplicable.

Para probar la unicidad de $^*_{L,k}$, se introducirá primero una relación $\succ$ sobre los términos etiquetados. Esta relación no tiene una motivación semántica, sino que se introduce como herramienta sintáctica y *ad hoc* para llevar a cabo las demostraciones con una notación más cómoda. En algún sentido, puede entenderse a $\succ$ como una versión debilitada y muy laxa de $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$ que no depende de L, k y que ignora todo lo que ocurra por debajo de una aplicación.

Definición 4.2.9. La relación $\succ$ se define inductivamente mediante las siguientes reglas:

$$\frac{}{x \succ x}$$

$$\frac{A \succ B}{\lambda^a x.A \succ \lambda^a x.B}$$

$$\frac{\mathsf{fv}(@(A_1{}^a, A_2)) \supseteq \mathsf{fv}(B)}{@(A_1{}^a, A_2) \succ B}$$

El significado intuitivo de $A \succ B$ es que B está “más instanciado” que A, donde las variables y abstracciones se consideran instanciadas, y las aplicaciones se consideran no instanciadas. El objetivo es que $\succ$ sobreaproxime $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$ asumiendo que, en el curso de un superdevelopment, una aplicación puede convertirse en cualquier cosa, siempre y cuando no contenga variables libres que no estuvieran ya presentes en el término original. Observar que si se considera un término $A = \lambda^{a_1\ldots a_n} x_1 \ldots x_n.@(A_1{}^b, A_2)$, cualquier superdevelopment de A va a estar más instanciado que A, es decir que necesariamente va a tener que conservar las abstracciones que se encuentran en la raíz de A. Esto es consistente con la definición de $\succ$.

Observación 4.2.10. Las propiedades siguientes se desprenden directamente de la definición de $>$ por análisis de casos e inducción:

1. Si $x > B$, entonces $B = x$.
2. Si $\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A' > B$, entonces $B = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.B'$ y $A' > B'$.
3. Si $A > B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(B)$.
4. Si $A > A'$ y $B > B'$, entonces $A^{\{-a\}}\{x := B\} > A'^{\{-a\}}\{x := B'\}$.

Se prueba además que, en un superdevelopment, el término final está más instanciado que el original:

Lema 4.2.11. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces $A > B$.

A continuación se enuncian varias propiedades del resultado de los superdevelopments completos. Dado que estas propiedades se utilizan, entre otras cosas, para probar la unicidad de $A^*_{L,k}$ (en caso de que exista), es necesario trabajar con cuidado de no estar asumiendo la unicidad de $A^*_{L,k}$ en el desarrollo de las demostraciones.

En versiones preliminares de este trabajo, para tener mayor seguridad de que no se estaba cometiendo un abuso de notación al escribir $A^*_{L,k}$ para denotar un término que no se sabía si era realmente único, en lugar de trabajar con la definición de "el resultado de los superdevelopments completos de A bajo L, k" se trabajó primero con una definición que describía el conjunto de todos los posibles resultados de calcular algún superdevelopment completo de A bajo L, k. Procediendo de esta manera, se pueden enunciar las propiedades escribiendo explícitamente la manera en la que se cuantifican los elementos tomados de dicho conjunto. Una vez hecho esto, se puede demostrar que el cardinal del conjunto es a lo sumo 1, es decir que si $A^*_{L,k}$ existe, es único.

En el enunciado y la demostración de las siguientes propiedades se tratará de evitar esa complejidad adicional, y se escribirá $A^*_{L,k}$ para denotar algún elemento tomado del conjunto de todos los posibles resultados de los superdevelopments completos de A bajo L, k. En los enunciados, se especificará en qué casos la cuantificación es universal y en cuáles existencial, pero en el curso de las demostraciones no se trabajará explícitamente con el conjunto para no recargar la notación. El conjunto de todos los posibles resultados de superdevelopments completos de A bajo L, k se notará $A^{\{*\}}_{L,k}$. La definición es la esperada; resulta de modificar la Definición 4.2.6 para que devuelva un conjunto de términos.

Por empezar, el siguiente lema provee una condición suficiente para la existencia de $A^*_{L,k}$:

Lema 4.2.12. Si existe un B tal que $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces $A^{\{*\}}_{L,k}$ es no vacío y $B > A^*_{L,k}$ para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$.

Corolario 4.2.13. $A^{\{*\}}_{L,0}$ es no vacío.

El siguiente lema afirma que de un término A puede hacerse un superstep para llegar al resultado de los superdevelopments completos de A:

Lema 4.2.14. $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} A^*_{L,k}$ para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$. Notar que $A^{\{*\}}_{L,k}$ puede ser vacío.

Por lo tanto, en el resultado de los superdevelopments completos no aparecen variables ni etiquetas que no estuvieran en el término original. Además, el resultado los superdevelopments completos bajo L, k tiene k abstracciones en la raíz.

Corolario 4.2.15. Para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$, se tiene que $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(A^*_{L,k})$ y $\mathsf{fl}(A) \supseteq \mathsf{fl}(A^*_{L,k})$.

Corolario 4.2.16. Para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$, se tiene que $A^*_{L,k}$ es de la forma $\lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.A'$.

En los siguientes lemas, se estudia la relación entre el resultado de los superdevelopments completos y la sustitución. Asumiendo condiciones razonables sobre el término B, una primera aproximación a los enunciados que se demuestran sería afirmar que $D_1 = A^*_{L,n}\{x := B^*_{L,m}\} = A\{x := B\}^*_{L,n+m} = D_2$. En realidad esto no es cierto. Como contraejemplo, considerar $A = y \neq x$, y observar que $y^*_{L,0}\{x := B^*_{L,m}\} = B^*_{L,m}$ pero $y^*_{L,m}$ no existe cuando $m > 0$.

En la igualdad propuesta, el término D_2 tiene $n + m$ abstracciones en la raíz. La intención es que el término D_1 tenga en la raíz las n abstracciones que provienen de $A^*_{L,n}$ seguidas de las m abstracciones que provienen de $B^*_{L,m}$. Es claro que D_1 efectivamente tiene en la raíz las n abstracciones de $A^*_{L,n}$. Si $m = 0$, la condición deseada ya se cumple, y por lo tanto el término $A^*_{L,n}$ puede tener cualquier forma. Cuando $m > 0$, debe ocurrir que $A^*_{L,n} = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$, pues en este caso (y sólo en este caso), será cierto que dichas n abstracciones estarán seguidas por las m abstracciones que provienen de $B^*_{L,m}$.

Los siguientes lemas están motivados por este razonamiento, y afirman esencialmente lo siguiente:

- $A^*_{L,k}\{x := B^*_{L,0}\} = A\{x := B\}^*_{L,k}$ (Lema 4.2.17).
- Si $A^*_{L,n} = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$, entonces $A^*_{L,n}\{x := B^*_{L,m}\} = A\{x := B\}^*_{L,n+m}$ (Lema 4.2.20).

Por motivos puramente técnicos, los enunciados de los lemas son un poco más complejos. Particularmente, se enuncian las propiedades sobre el conjunto de resultados de los superdevelopments completos $A^{\{*\}}_{L,k}$, de manera que no se asuma la unicidad de $A^*_{L,k}$. Además, en el Lema 4.2.20 se requieren algunas hipótesis adicionales para evitar dependencias mutuamente recursivas con afirmaciones posteriores.

Lema 4.2.17. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $a \notin \mathsf{fl}(B)$ y $x \notin \mathsf{fv}(B)$. Entonces:

1. Si $A^*_{L,k} = \lambda^a x.A'$, entonces $A' = B^*_{L,k-1}$ para algún B.

   Más precisamente, sea $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$. Si $A^*_{L,k} = \lambda^a x.A'$ con $k > 0$, entonces existen un B y un $B^*_{L,k} \in B^{\{*\}}_{L,k}$ tales que $A' = B^*_{L,k-1}$. Además, si $A^*_{L,k}$ es único, $B^*_{L,k}$ es único.

2. ${A^*_{L,k}}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} = A^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,k}$.

   Más precisamente, se prueba que son iguales:

- El conjunto de los ${A^*_{L,k}}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}$ tales que $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$ y $B^*_{L,0} \in B^{\{*\}}_{L,0}$.
- El conjunto $A^{\{-a\}}\{x := B\}^{\{*\}}_{L,k}$.

Corolario 4.2.18. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $x \notin \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Si además $x \notin \mathsf{fv}(A^*_{L,k})$, entonces $A\{x := B\}^{\{*\}}_{L,k} = A^{\{*\}}_{L,k}$.

Corolario 4.2.19. ${A^{\{*\}}_{L,k}}^{\{-a\}} = {A^{\{-a\}}}^{\{*\}}_{L,k}$

Lema 4.2.20. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $a \notin \mathsf{fl}(B)$, $x \notin \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Suponer $A^{\{*\}}_{L,n}$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es $A^*_{L,n} = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$. Asumir además que para los términos X más chicos que $@(A^a, B)$ se cumple $X^*_{L,k} \succ X^*_{L,k'}$ si existen $X^*_{L,k}$ y $X^*_{L,k'}$ y además $k' \geq k$.

Entonces ${A^*_{L,n}}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\} = A^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n+m}$. Más precisamente, son iguales:

- El conjunto de los ${A^*_{L,n}}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\}$ tales que $B^*_{L,m} \in B^{\{*\}}_{L,m}$.
- El conjunto $A^{\{-a\}}\{x := B\}^{\{*\}}_{L,n+m}$.

La asunción de que $X^*_{L,k} \succ X^*_{L,k'}$ es un detalle técnico que se requiere para poder demostrar este lema sin depender del que viene a continuación.

El siguiente lema relaciona los supersteps y el resultado de los superdevelopments completos de un par de términos A y B, variando los parámetros L y k. En general, si se tienen dos conjuntos de variables prohibidas tales que $L' \subset L$, el más chico de los dos, L' en este caso, es más permisivo, porque permite que se contraigan redexes con variables ligadas en L. Si se tienen dos valores $k' > k$, el más grande de los dos, k' en este caso, es más permisivo, porque permite que se contraigan redexes ligados por las k' abstracciones más externas.

Lema 4.2.21. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$. Sean $L' \subseteq L$ y $k' \geq k$. Si existe $A^*_{L',k'} \in A^{\{*\}}_{L',k'}$, entonces existe un único valor $B^*_{L'k'} \in B^{\{*\}}_{L',k'}$. Además $A^*_{L',k'} = B^*_{L',k'}$.

Una vez enunciados y probados los resultados anteriores, se resumen algunas de las propiedades más importantes de $A^*_{L,k}$ en el siguiente corolario.

Corolario 4.2.22. Dado $A \in \Lambda_\ell$, si $A^*_{L,k}$ existe, entonces es único. Además, $A^*_{L,k}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, entonces $B \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell A^*_{L,k}$.
2. Si $L' \subseteq L$ y $k' \geq k$, entonces $A^*_{L,k} \overset{L',k'}{\Rightarrow}_\ell A^*_{L',k'}$.
3. $A\{x := B\}^*_{L,k} = A^*_{L,k}\{x := B^*_{L,0}\}$.
4. Si $A^*_{L,n} = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$, entonces $A\{x := B\}^*_{L,n+m} = A^*_{L,n}\{x := B^*_{L,m}\}$.

Notar que el corolario resume las propiedades de manera ligeramente imprecisa, porque en general el término $A^*_{L,k}$ podría no existir. En esas situaciones, consultar los lemas anteriores.

4.3. Propiedades de la reducción simultánea etiquetada

4.3.1. Términos (L, k)-etiquetados

El objetivo de este capítulo es probar la equivalencia entre los superdevelopments definidos mediante la relación de reducción etiquetada y los supersteps sin etiquetas, definidos mediante el juicio de reducción simultánea. Cuando se quiera demostrar que, si $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$, entonces $M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell$, será necesario construir versiones etiquetadas M_ℓ y N_ℓ de M y N. En la Definición 3.2.7 se exige que el término inicial M_ℓ esté *inicialmente* etiquetado, es decir que todas las etiquetas que decoran las abstracciones sean distintas. Por motivos técnicos, que se entenderán mejor en el desarrollo de la demostración, en lugar de trabajar con el término M_ℓ inicialmente etiquetado, se trabajará con términos que cumplen propiedades de etiquetado más específicas.

Trabajar con términos inicialmente etiquetados tiene dos desventajas: la primera es que dicha propiedad no se preserva por reducciones, por ejemplo, en el siguiente paso de reducción:

$$@((\lambda^a x.x\,x)^a, \lambda^b y.y) \to_\ell (\lambda^b y.y)\, \lambda^b y.y$$

se parte de un término que no tiene etiquetas libres repetidas, y se llega a un término en el cual b ocurre dos veces. La segunda desventaja es que las etiquetas libres en sí mismas no son interesantes, porque no están asociadas a una aplicación. Trabajar con términos que no tengan etiquetas libres distintas de $\star$ simplifica las demostraciones.

Por eso, cuando se construyan los términos M_ℓ y N_ℓ tales que $M_\ell \overset{L}{\to}_\ell N_\ell$, se hará de tal manera que M_ℓ y N_ℓ sean términos $(L, 0)$-*etiquetados*. En general, cuando en lugar de tener $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$ se tenga como hipótesis $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$ para cualquier posible valor de k, será necesario construir versiones etiquetadas M_ℓ y N_ℓ de M y N, de tal manera que sean términos (L, k)-etiquetados.

Más adelante se verá que la propiedad de ser (L, k)-etiquetado se preserva por $\overset{L}{\to}_\ell$ reducciones y por supersteps bajo L, k. También se verá de qué manera se relacionan los términos (L, k)-etiquetados con los términos inicialmente etiquetados, para relacionar la definición de superdevelopments débiles (Definición 3.2.7) con los resultados que se obtengan en las secciones que siguen. La definición de término (L, k)-etiquetado se enuncia a continuación.

Definición 4.3.1 (Términos (L, k)-etiquetados)**.** Un término A se dice (L, k)-etiquetado sii se cumplen las condiciones siguientes:

(1) Existe $A^*_{L,k}$ y es de la forma $\lambda^{a_1 \dots a_k} x_1 \dots x_k.A'$, donde las etiquetas $a_1, \dots, a_k$ son todas distintas de $\star$ y distintas entre sí.

(2) En A' no hay etiquetas libres distintas de $\star$.

En general se espera que, en un juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, tanto A como B sean términos (L, k)-etiquetados. A continuación se da una condición suficiente para que un término sea (L, k)-etiquetado.

Observación 4.3.2. Si A es de la forma $\lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.A'$, donde $a_1,\ldots,a_k$ son todas distintas de $\star$ y distintas entre sí, y además A' no tiene etiquetas libres distintas de $\star$, entonces A es (L,k)-etiquetado.

Demostración. Por definición se tiene que $A^*_{L,k} = \lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.A'^*_{L,0}$. Por el Corolario 4.2.15 se tiene que $A'^*_{L,0}$ no puede tener variables libres distintas de $\star$. □

En particular, observar que alcanza con que un término A no tenga etiquetas libres distintas de $\star$ para ser $(L,0)$-etiquetado. A continuación se prueba que la propiedad de ser (L,k)-etiquetado se preserva en un superstep bajo L,k.

Lema 4.3.3. Si A es un término (L,k)-etiquetado y $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, entonces B es un término (L,k)-etiquetado.

Demostración. Por el Lema 4.2.21, se tiene que $A^*_{L,k} = B^*_{L,k}$. Por lo tanto, las condiciones se satisfacen trivialmente. □

En el siguiente lema se enuncia la relación entre los supersteps a secas $\overset{L,k}{\Rightarrow}$ y los supersteps etiquetados $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$. En general es cierto que si hay un superstep sobre términos etiquetados, las etiquetas pueden borrarse y se sigue teniendo un superstep. En el sentido opuesto, si se tiene un superstep sobre términos sin etiquetas, pueden construirse términos etiquetados para los cuales siga habiendo un superstep. Notar que obviamente no es cierto que *cualquier* manera de etiquetar los términos mantenga la relación de superstep. Por ejemplo, el siguiente juicio es derivable:

$$(\lambda x.x)\, z \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} z$$

pero el siguiente sólo es derivable si $a = b$:

$$@((\lambda^b x.x)^a, z) \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow}_\ell z$$

Al pasar de términos sin etiquetas a términos etiquetados, se probará de manera constructiva que pueden asignarse etiquetas a las aplicaciones y abstracciones de manera tal que el superstep se mantenga. Además, los términos se decorarán de tal manera que queden "bien" etiquetados, para lo cual es preciso introducir primero la siguiente definición.

Definición 4.3.4 (Términos linealmente etiquetados)**.** Un término A se dice *linealmente etiquetado* sii todas sus etiquetas distintas de $\star$ son distintas entre sí. Más precisamente, si:

- Cada aplicación liga a lo sumo una etiqueta. Es decir, para cada subtérmino de A de la forma $@(A_1{}^a, A_2)$ hay a lo sumo una ocurrencia de a en A_1.
- Todas las etiquetas libres distintas de $\star$ son distintas entre sí. Es decir, si $A|_p = \lambda^a x.A_1$ y $A|_q = \lambda^b y.A_2$ son subtérminos de A tales que dichas ocurrencias de a y b están libres, y además $a \neq \star$, $b \neq \star$, $p \neq q$, entonces $a \neq b$.

Lema 4.3.5. Relación entre $\overset{L,k}{\Rightarrow}$ y $\overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell}$:

1. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} B$, entonces $|A| \overset{L,k}{\Rightarrow} |B|$.

2. Si $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$, entonces existen $M_\ell, N_\ell \in \Lambda_\ell$, con M_ℓ (L,k)-etiquetado y M_ℓ linealmente etiquetado, tales que $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow}_{\ell} N_\ell$.

Los términos linealmente etiquetados, al igual que los términos inicialmente etiquetados (presentados en la Definición 3.2.6), no permiten que haya dos abstracciones decoradas con la misma etiqueta. La única diferencia es que los términos linealmente etiquetados son ligeramente más laxos, porque sí permiten que haya varias abstracciones decoradas con $\star$. En los siguientes lemas, se relacionan los términos linealmente e inicialmente etiquetados:

Lema 4.3.6 (De términos linealmente etiquetados a términos inicialmente etiquetados)**.** Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $A \twoheadrightarrow_\ell B$, con A linealmente etiquetado. Entonces existen $A', B' \in \Lambda_\ell$ tales que $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, $A' \twoheadrightarrow_\ell B'$ y A' inicialmente etiquetado.

Lema 4.3.7 (De términos inicialmente etiquetados a términos linealmente etiquetados)**.** Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $A \twoheadrightarrow_\ell B$ con A inicialmente etiquetado y B en $\rightarrow_\ell$-forma normal. Entonces existen $A', B' \in \Lambda_\ell$ tales que $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, $A' \twoheadrightarrow_\ell B'$, A' linealmente etiquetado y B' en $\rightarrow_\ell$-forma normal.

4.4. De reducción simultánea a reducción etiquetada

Nos ocuparemos primero del primer ítem del Teorema 4.1.1, que afirma que si $M \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} N$, entonces existen M_ℓ, N_ℓ, con M_ℓ inicialmente etiquetado, tales que $M_\ell \twoheadrightarrow_\ell N_\ell$.

Como se anticipó en la sección anterior, en lugar de trabajar con términos inicialmente etiquetados, los resultados se enuncian primero en función de términos (L,k)-etiquetados. Se construirán M_ℓ y N_ℓ de tal manera que estén $(\emptyset,0)$-etiquetados, y a partir de esta construcción se demostrará que también es posible construir términos M'_ℓ y N'_ℓ con M'_ℓ inicialmente etiquetado. Esto se posterga hasta el Corolario 4.4.14.

Además, dado que se trata de reducción débil en el cálculo-λ^w, será necesario considerar una versión más general de la afirmación, que contemple el caso en el que el superstep en cuestión se dé bajo un contexto en el que no se permita contraer redexes con ocurrencias de ciertas variables. Se considera entonces un contexto de variables prohibidas L, y se refina la afirmación de la siguiente manera: si $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$, entonces existen M_ℓ, N_ℓ con M_ℓ $(L,0)$-etiquetado, tales que $M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell$.

Asumiendo $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$ y usando el Lema 4.3.5 (2), se tiene que existen $M_\ell, N_\ell \in \Lambda_\ell$, con M_ℓ $(L,0)$-etiquetado, tales que $M_\ell \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} N_\ell$. Bastaría entonces con probar que:

$$M_\ell \overset{L,0}{\Rightarrow}_{\ell} N_\ell \text{ implica } M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell \tag{4.1}$$

La intención sería demostrar (4.1) por inducción en la derivación del juicio $M_\ell \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} N_\ell$, pero es claro que, si se lo intenta, en algunos casos no van a darse las condiciones para aplicar la hipótesis inductiva, porque van a aparecer juicios de la forma $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$ con $k > 0$. Si bien la afirmación dada en (4.1) es verdadera, para plantear la demostración por inducción resulta necesario trabajar con una propiedad más fuerte. Una generalización en la que uno podría pensar inmediatamente es la siguiente:

$$M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} N_\ell \text{ implica } M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow_\ell} N_\ell \text{ para todo } k \tag{4.2}$$

Pero en general (4.2) no es verdadera. El problema es que, cuando $k > 0$, se permite que se contraigan redexes con variables ligadas, lo cual está siempre prohibido en una secuencia de pasos de reducción etiquetada.

Ejemplo 4.4.1.

$$\lambda^a x.@((\lambda^b y.y)^b, x) \overset{\emptyset,1}{\Rightarrow_\ell} \lambda^a x.x$$

pero

$$\lambda^a x.@((\lambda^b y.y)^b, x) \not\twoheadrightarrow_\ell \emptyset\lambda^a x.x$$

Este ejemplo sugiere que, para probar una propiedad similar a (4.2) por inducción en la derivación del juicio $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} N_\ell$, es necesario relajar la noción de reducción etiquetada, de tal manera que *sí* permita la contracción de *algunos* redexes con ocurrencias de variables ligadas. De acuerdo con la idea que motivaba la definición de los supersteps, *sólo* debería permitirse la contracción de un redex con ocurrencias de variables ligadas si las abstracciones que ligan esas variables van a ser usadas en algún paso posterior del superdevelopment débil (es decir, si dichas abstracciones van a contribuir al patrón de algún redex).

A continuación se define esta versión relajada de la reducción etiquetada, a la que se da el nombre de *reducción en cadena*. La definición surge de analizar delicadamente las condiciones que se requieren para poder generalizar (4.1) y plantear la demostración por inducción, especialmente en el caso de la aplicación, que es el más complejo.

Definición 4.4.2 (Reducción en cadena). El juicio $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$ se define por inducción en k de la siguiente manera:

- $A \overset{L,0}{\rightsquigarrow} B$ si y sólo si $A \overset{L}{\twoheadrightarrow_\ell} B$.
- $A \overset{L,k+1}{\rightsquigarrow} B$ si y sólo si existen A_1, A_2 tales que:
    1. $A \overset{L}{\twoheadrightarrow_\ell} \lambda^a x.A_1$
    2. $A_1 \overset{L,k}{\rightsquigarrow} A_2$.
    3. $B = \lambda^a x.A_2$

Dada esta definición, se verá que $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell \subseteq \overset{L,k}{\rightsquigarrow}$. Observar primero que si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces existen variables x_i y etiquetas a_i, con $1 \leq i \leq k$, y $B' \in \Lambda_\ell$ tales que $B = \lambda^{a_1 \ldots a_k} x_1 \ldots x_k.B'$. Es decir, si hay una reducción en cadena de A a B bajo L, k, entonces B tiene k abstracciones en la raíz. Esto es similar a lo afirmado en el Lema 4.2.5.

Intuitivamente, el juicio $\overset{L,k}{\rightsquigarrow}$ es una versión relajada de $\overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell$ en la que se permite la contracción de redexes ligados bajo las k abstracciones más externas. Para comparar con el Ejemplo 4.4.1, observar que es posible derivar el siguiente juicio de reducción en cadena:

$$A = \lambda^a x.@((\lambda^b y.y)^b, x) \overset{\emptyset,1}{\rightsquigarrow} \lambda^a x.x = B$$

pues:

$$\lambda^a x.@((\lambda^b y.y)^b, x) \overset{\emptyset}{\to}_\ell \lambda^a x.@((\lambda^b y.y)^b, x) = \lambda^a x.A_1$$

$$@((\lambda^b y.y)^b, x) \overset{\emptyset,0}{\rightsquigarrow} x = A_2$$

$$B = \lambda^a x.A_2$$

Para demostrar por inducción que $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell \subseteq \overset{L,k}{\rightsquigarrow}$, se requieren las siguientes propiedades de congruencia para la reducción en cadena. Las pruebas de las siguientes propiedades se detallan en la Sección A.6.

Lema 4.4.3. Si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \cap L = \mathsf{fv}(B) \cap L$.

Lema 4.4.4. Si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^k} \overline{x}^k.B$ y a es una etiqueta distinta de $a_1 \ldots a_n$, entonces $A^{\{-a\}} \overset{L,k}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^k} \overline{x}^k.B^{\{-a\}}$.

Lema 4.4.5. Si $A \overset{L}{\to}_\ell A'$ y $A' \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$

Lema 4.4.6 (Abstracción I)**.** Si $A \overset{x \cdot L,0}{\rightsquigarrow} B$, entonces $\lambda^a x.A \overset{L,0}{\rightsquigarrow} \lambda^a x.B$.

Lema 4.4.7 (Abstracción II)**.** Si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces $\lambda^a x.A \overset{L,k+1}{\rightsquigarrow} \lambda^a x.B$.

Lema 4.4.8 (Aplicación I)**.** Si $A \overset{L,0}{\rightsquigarrow} A'$ y $B \overset{L,0}{\rightsquigarrow} B'$, entonces $@(A^a, B) \overset{L,0}{\rightsquigarrow} @(A'^a, B')$.

Lema 4.4.9 (Aplicación II)**.** Sean $A \overset{L,n+1}{\rightsquigarrow} \lambda^a x.A' = \lambda^{a\,\overline{a}^n} x\,\overline{x}^n.A''$ y $B \overset{L,m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{b}^m} \overline{y}^m.B'$, asumiendo además que $\mathsf{fv}(\lambda^a x.A') \uparrow L$, que $\mathsf{fv}(B') \uparrow L$ y que no hay etiquetas repetidas en $a, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Entonces:

1. Si $m > 0$ y $A'' = x$, entonces $@(A^a, B) \overset{L,n+m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.\lambda^{\overline{b}^m} \overline{y}^m.B'$
2. Si $m = 0$, entonces $@(A^a, B) \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.A''^{\{-a\}}\{x := B'\}$.

Los dos casos considerados se corresponden directamente con las dos alternativas posibles de la regla LApp2, que dependen del valor de m. En el primer caso, cuando $m > 0$, algunas de las abstracciones que quedan en la raíz provienen de B. En el segundo caso, que se da cuando $m = 0$, todas las abstracciones que quedan en la raíz provienen de A.

Dadas estas propiedades, se puede reemplazar las ecuaciones (4.1) y (4.2) por la siguiente afirmación:

Proposición 4.4.10. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$, $L \subseteq \mathcal{V}$, $k \geq 0$, donde A es un término (L, k)-etiquetado. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, entonces $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$.

Demostración. Por inducción en la derivación de $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$. Cada caso es directo, recurriendo al Lema 4.4.6 para la regla LAbs1, al Lema 4.4.7 para la regla LAbs2, al Lema 4.4.8 para la regla LApp1, y al Lema 4.4.9 para la regla LApp2.

Para el caso LApp2, se tiene que $A = @({A_1}^a, A_2)$, con:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\overset{L,n+1}{\Rightarrow}_\ell \lambda^a x.A_1' = \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A_1'' \\
A_2 &\overset{L,m}{\Rightarrow}_\ell A_2' = \lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.A_2'' \\
B &= {A_1'}^{\{-a\}}\{x := A_2'\}
\end{aligned}
$$

Para poder aplicar el Lema 4.4.9, es necesario que se cumpla la hipótesis de que las etiquetas $a, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ son todas distintas entre sí.

Esto se deduce del hecho de que A es (L, k)-etiquetado, usando las propiedades de $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$. Concretamente, las etiquetas $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ decoran las k abstracciones en la raíz de B. Por definición de término (L, k)-etiquetado (Definición 4.3.1) y propiedades del resultado de los superdevelopments completos (observando que $B \succ A^*_{L,k}$, de acuerdo con el Lema 4.2.12), se concluye que las etiquetas $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, que decoran las abstracciones en la raíz de B, son todas distintas de $\star$ y distintas entre sí.

En cuanto a la etiqueta a, es claro que debe ser distinta de $\star$, porque si fuera $\star$ no podría estar ligada ni contribuir al redex que se está contrayendo. Además, $a \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$ porque, de lo contrario, al aplicar el operador $^{\{-a\}}$ alguna de las etiquetas a_i se sustituiría por $\star$, contradiciendo el hecho de que B es (L, k)-etiquetado. Por último, $a \notin \{b_1, \ldots, b_m\}$ porque a está ligada en A_1, mientras que las etiquetas b_i provienen de A_2. □

Corolario 4.4.11. La reducción etiquetada y su presentación simultánea se relacionan de la siguiente manera:

1. Si $A \overset{L}{\to}_\ell B$, entonces $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell B$.

2. Si $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell B$ y A es un término $(L, 0)$-etiquetado, entonces $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell B$.

Corolario 4.4.12. Si A es un término $(L, 0)$-etiquetado y $A \overset{L}{\to}_\ell B$, entonces B es un término $(L, 0)$-etiquetado.

Las demostraciones de ambos corolarios se detallan en la Sección A.6.

Lema 4.4.13 (De reducción simultánea a reducción etiquetada)**.** Si $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$, entonces existen M_ℓ, N_ℓ, con M_ℓ $(L,0)$-etiquetado y M_ℓ linealmente etiquetado, tales que $M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell$.

Demostración. Asumiendo que $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$, por el Lema 4.3.5 (2) se tiene que existen M_ℓ, N_ℓ tales que M_ℓ es un término $(L,0)$-etiquetado y linealmente etiquetado, con $M_\ell \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell N_\ell$. Por el Corolario 4.4.11 (2), se concluye directamente que $M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell$. □

Corolario 4.4.14. Si $M \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} N$, entonces existen M_ℓ, N_ℓ, con M_ℓ inicialmente etiquetado tales que $M_\ell \twoheadrightarrow_\ell N_\ell$.

Demostración. Por el lema anterior, existen M_ℓ, N_ℓ tales que $M_\ell \twoheadrightarrow_\ell N_\ell$. M_ℓ es un término linealmente etiquetado. Por el Lema 4.3.6, pueden obtenerse términos M'_ℓ, N'_ℓ tales que $M'_\ell \twoheadrightarrow_\ell N'_\ell$ con M_ℓ inicialmente etiquetado. □

El primer ítem del Teorema 4.1.1 es exactamente este corolario. En la siguiente sección se desarrollará la demostración del segundo ítem de dicho teorema.

4.5. De reducción etiquetada a reducción simultánea

La demostración del segundo ítem del Teorema 4.1.1 es relativamente directa una vez que se dispone de la noción de resultado de los superdevelopments completos y de las propiedades estudiadas en la Sección 4.2.1. Primero se prueba que la relación $\overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell$ satisface la propiedad del diamante:

Lema 4.5.1 (Propiedad del diamante de $\overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell$)**.** Si $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell A_i$ para $i \in \{1,2\}$, entonces existe un B tal que $A_i \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell B$. En particular, se cumple si $B = A^*_{L,0}$.

Demostración. Tomando $B = A^*_{L,0}$, se tiene que $A_i \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell A_i{}^*_{L,0}$ usando el Lema 4.2.14. Además, $A_i{}^*_{L,0} = A^*_{L,0}$, por el Lema 4.2.21. □

A continuación se prueba que existe una secuencia de pasos de reducción etiquetada de un término al resultado de sus superdevelopments completos. El término debe estar adecuadamente etiquetado para el contexto bajo el cual se efectúa el superdevelopment.

Lema 4.5.2. Sea $A \in \Lambda_\ell$. Si A es $(L,0)$-etiquetado, entonces $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell A^*_{L,0}$.

Demostración. Por el Lema 4.2.14, se tiene que $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell A^*_{L,0}$. Por el Corolario 4.4.11, se concluye $A \overset{L,0}{\twoheadrightarrow}_\ell A^*_{L,0}$. □

En el siguiente lema se relaciona de manera más general la reducción etiquetada con el resultado de los superdevelopments completos.

Lema 4.5.3. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que A es $(L, 0)$-etiquetado y $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell B$. Entonces $B \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell A^*_{L,0}$.

Demostración. Suponer que $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell B$. Por el Corolario 4.4.11, se tiene que $A \overset{L,0}{\Rrightarrow_\ell} B$. Se concluye entonces que $A^*_{L,0} = B^*_{L,0}$ utilizando el Lema 4.2.21 (por inducción en la cantidad de pasos de $\overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell$). Además, $B \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell B^*_{L,0} = A^*_{L,0}$ por el Lema 4.5.2. □

A continuación se demuestra que el cálculo-λ^w es confluente, siempre que se trabaje con términos adecuadamente etiquetados. Por ejemplo, si A es $(\emptyset, 0)$-etiquetado y $A \twoheadrightarrow_\ell A_i$, entonces existe un B tal que $A_i \twoheadrightarrow_\ell B$. Es decir, $\rightarrow_\ell$ es confluente restricta a términos $(\emptyset, 0)$-etiquetados. Más en general, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.5.4. La relación $\overset{L}{\rightarrow}_\ell$ es confluente restricta a términos $(L, 0)$-etiquetados.

Demostración. Notar primero que si A es $(L, 0)$-etiquetado y $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell A'$, entonces A' es $(L, 0)$-etiquetado como consecuencia del Corolario 4.4.12. Suponer que $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell A_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Por el lema anterior, $A_i \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell A^*_{L,0}$, de donde se concluye que $\overset{L}{\rightarrow}_\ell$ es confluente si se trabaja únicamente con términos $(L, 0)$-etiquetados. □

El siguiente lema afirma que el resultado de los superdevelopments completos de un término está en forma normal. La demostración se desarrolla en la Sección A.7.

Lema 4.5.5. Si $A^*_{L,k}$ existe, entonces es de la forma $\lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.B$ donde B está en $\overset{L}{\rightarrow}_\ell$-forma normal.

Lema 4.5.6 (De reducción etiquetada a reducción simultánea)**.** Si $M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell$ con M_ℓ $(L, 0)$-etiquetado y N_ℓ en $\overset{L}{\rightarrow}_\ell$-forma normal, entonces $M \overset{L,0}{\Rightarrow} N$.

Demostración. Suponer que $M_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell N_\ell$ con M_ℓ $(L, 0)$-etiquetado y N_ℓ en $\overset{L}{\rightarrow}_\ell$-forma normal. Por el Lema 4.5.3, se tiene que $N_\ell \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell M_\ell{}^*_{L,0}$. Además, como N_ℓ está en $\overset{L}{\rightarrow}_\ell$-forma normal, no puede haber un paso de reducción, y por lo tanto $N_\ell = M_\ell{}^*_{L,0}$. Se recurre al Lema 4.2.14 para afirmar que $M_\ell \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell M_\ell{}^*_{L,0}$. Por último, se aplica el Lema 4.3.5 (1) para concluir que $M \overset{L,0}{\Rightarrow} |M_\ell{}^*_{L,0}| = N$. □

Finalmente, el siguiente corolario se corresponde exactamente con el segundo ítem del Teorema 4.1.1:

Corolario 4.5.7. Si $M_\ell \twoheadrightarrow_\ell N_\ell$ con M_ℓ inicialmente etiquetado y N_ℓ en $\rightarrow_\ell$-forma normal, entonces $M \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} N$.

Demostración. Por el Lema 4.3.7, existen M'_ℓ, N'_ℓ con M'_ℓ linealmente etiquetado y N'_ℓ en $\rightarrow_\ell$-forma normal tales que $M'_\ell \twoheadrightarrow_\ell N'_\ell$. Por la Observación 4.3.2, M'_ℓ es $(\emptyset, 0)$-etiquetado, de donde, usando el lema anterior, se concluye que $M \overset{\emptyset,0}{\Rightarrow} N$. □

$M \to N$	reducción débil a secas (Definición 1.2.8)
$A \to_\ell B$	reducción débil sobre términos etiquetados (equivalente a $A \xrightarrow{\emptyset}_\ell B$)
$A \xrightarrow{L}_\ell B$	reducción débil sobre términos etiquetados (Definición 3.2.3) los redexes no pueden contener variables en L
$M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$	reducción simultánea (Definición 3.6.3)
Definiciones auxiliares	
$A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$	reducción simultánea etiquetada (Definición 4.2.1)
$A^*_{L,k}$	superdevelopment completo de A bajo L, k (Definición 4.2.6)
$A \succ B$	"B más instanciado que A" (Definición 4.2.9) variante auxiliar de los supersteps independiente de L, k
$A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$	reducción en cadena (Definición 4.4.2) generalización de $\xrightarrow{L}_\ell$ que tiene en cuenta k

Cuadro 4.1: Resumen de las definiciones introducidas

En el Cuadro 4.1 se resumen las relaciones y juicios con los que se definen los superdevelopments, y también las definiciones auxiliares involucradas en las demostraciones.

5 Conclusiones

La creación de redexes en el cálculo-λ^w es ligeramente más compleja que en el cálculo-λ. Esto inspira la pregunta de cómo se comportan los superdevelopments débiles. Se caracterizaron primero las cuatro maneras en las que se pueden crear redexes en el cálculo-λ^w. Se demostró también que los superdevelopments débiles son finitos, es decir que sólo una de las maneras de crear redexes (el Caso III) conduce a secuencias infinitas de pasos de reducción. Se presentaron dos definiciones de superdevelopments débiles y se demostró que son equivalentes.

La idea que motiva la definición de la reducción etiquetada es fácil de entender, pero resulta complicado probar algunas propiedades basándose sólo en esta definición. La reducción simultánea resulta más apropiada para esto. El problema es que, como se vio en el desarrollo del trabajo, no es tan simple dar una definición inductiva de la relación de superstep débil. Por un lado, al dar una definición inductiva, resulta necesario trabajar con términos que tienen ocurrencias libres de variables que originalmente se encontraban ligadas; esto hace que sea necesario introducir un conjunto de variables prohibidas L. Por otro lado, en algunos casos es necesario permitir la contracción de redexes que tengan ocurrencias de variables ligadas por el contexto; esto es necesario cuando las abstracciones que ligan dichas variables van a contribuir a un redex en algún paso posterior de la derivación. Esto conduce a la relación generalizada $\overset{L,k}{\Rightarrow}$, donde se permite contraer redexes que tengan ocurrencias de variables ligadas por cualquiera de las k abstracciones más externas. La presencia de k es lo que introduce mayor complejidad para enunciar y probar una correspondencia entre las dos nociones (reducción etiquetada y reducción simultánea).

Como herramienta técnica indispensable para probar la equivalencia entre las dos definiciones, fue necesario introducir la noción de resultado de los superdevelopments completos, que corresponde, por un lado, a la forma normal de la reducción etiquetada, y por otro, a un juicio de reducción simultánea en el que se elige contraer un redex siempre que sea posible.

5.1. Limitaciones y trabajo futuro

La técnica de definir un juicio análogo al de los supersteps ($M \Rightarrow N$), y el resultado de los superdevelopments completos M^*, es usada por Aczel [Acz78] para el cálculo-λ, y por Mayr y Nipkow [MN98] para demostrar la confluencia de sistemas de reescritura de alto orden (HRS ortogonales). En este trabajo se hace algo similar para el cálculo-λ^w. Si el objetivo es probar la confluencia del sistema de reescritura en cuestión, no está claro cuáles son las ventajas de usar superdevelopments completos en lugar de developments completos, que cuentan con una definición mucho más simple, como en la prueba de Takahashi [Tak89]. En la literatura consultada, la decisión de usar superdevelopments en lugar de developments no está motivada. En el caso del cálculo-λ^w, recurrir a la definición del resultado de los superdevelopments completos (Definición 4.2.6) para estudiar la confluencia del cálculo resulta excesivamente complejo comparado con, por ejemplo, la demostración esbozada por Lévy y Maranget [LM99].

Por otra parte, las propiedades del resultado de los superdevelopments completos que se enuncian en la Sección 4.2.1 en general resultan demasiado técnicas. Los lemas enunciados requieren mucho cuidado en las hipótesis y un nivel de detalle considerable para lidiar con el hecho de que, en principio, el resultado de los superdevelopments completos no tiene por qué ser único. Estos resultados serían mucho más prolijos si se pudieran simplificar. Lo ideal sería probar directamente propiedades más parecidas a las que se enuncian en el resumen que se hace en el Corolario 4.2.22. Otra posibilidad sería demostrar primero, con alguna técnica alternativa, que si $A^*_{L,k}$ existe es único.

Una pregunta posible es hasta qué punto es necesario introducir los formalismos intermedios, como los supersteps etiquetados (Definición 4.2.1) y la reducción en cadena (Definición 4.4.2), para demostrar la equivalencia de las definiciones. En versiones preliminares de este trabajo, en lugar de usar la variante etiquetada de los supersteps ($\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$), se hacía la traducción directamente desde los supersteps a secas ($\overset{L,k}{\Rightarrow}$) para construir el juicio de reducción en cadena ($\overset{L,k}{\rightsquigarrow}$). A posteriori, introducir el formalismo intermedio de los supersteps etiquetados hizo que el paso de supersteps a reducción en cadena quedara más prolijo, porque de esta manera se desacopla la introducción de etiquetas (Lema 4.3.5 (2)) de la "verdadera" traducción (Proposición 4.4.10).

Un objetivo a más largo plazo sería el de extender la metateoría de la reducción débil en el marco más general de los sistemas de reescritura de alto orden (HORs). Como parte del trabajo de esta tesis, se trató de generalizar las definiciones de supersteps débiles y resultado de los superdevelopments completos para adaptarlas a los HORs.

En primer lugar, se consideró una noción de HOR ortogonal para reducción débil. Por ejemplo, $\{g(\lambda x.f\,x) \to a, f\,y \to b\}$ no es ortogonal para la reducción usual, pero sí para la reducción débil, ya que $f\,x$ contiene una x ligada y no es un redex.

En segundo lugar, hay que determinar qué significa que un ligador "intervenga" en un redex para permitir que se contraigan subtérminos conteniendo variables ligadas por dicho ligador. Por ejemplo, en $\{f(\lambda x.g(y(x), z(x))) \to f(\lambda x.g(y(a), z(x)))\}$, se debe permitir que se contraigan los redexes que involucran ocurrencias de x por debajo de y, pero no se debe permitir que se contraigan los redexes que involucran ocurrencias de x por debajo de z.

Por último, hay una dificultad que no es evidente en el cálculo-λ con la cual habría que lidiar en el caso de los sistemas de reescritura de alto orden en general. En el juicio $M \overset{L,n+1}{\Rightarrow} \lambda x.M'$ de la regla App2, los pasos de reducción que involucran ocurrencias libres de x no contribuyen a la creación del redex más externo de App2. En el caso de los HORs, este requerimiento debe hacerse explícito. Es decir, la generalización de $M \overset{L,n+1}{\Rightarrow} \lambda x.M'$ debería exigir que los pasos de reducción que involucran ocurrencias libres de x no contribuyan a la creación del redex que se está contrayendo.

A Demostraciones

En este apartado se desarrollan las demostraciones completas de los resultados no probados en las secciones centrales del trabajo.

A.1. Creación de redexes

Lema 2.3.4. Sean $M, N \in \Lambda^\star$ con $M \xrightarrow{\Delta} N$. Entonces $N|_q$ es de la forma $(\lambda^\star x.A)\, B$ si y sólo si q es descendiente de una posición $p \in M$ tal que $M|_p$ es de la forma $(\lambda^\star x.A')\, B'$.

Demostración. Por inducción en el contexto en el que se contrae el redex Δ. Si la reducción no es a la cabeza, el contexto no es $\Box$, y es trivial aplicando hipótesis inductiva. Si la reducción es a la cabeza, entonces:

$$M = (\lambda^\star y.P)\, Q \xrightarrow{M} P\{y := Q\} = N$$

Sea $q \in \mathsf{pos}(N)$. Entonces o bien $q \in \mathsf{pos}(P)$ con $P|_q \neq y$, o bien $q = q_1 q_2$ con $P|_{q_1} = y$, $q_2 \in \mathsf{pos}(Q)$.

($\Rightarrow$) En el primer caso, $P\{y := Q\}|_q = P|_q\{y := Q\}$. Razonando por el absurdo, sólo puede ocurrir que $P|_q$ sea de la forma $(\lambda^\star x.A')\, B'$. Además, tomando $p = 0q$, q es descendiente de p y $M|_p = P|_q$.

En el segundo caso, $P\{y := Q\}|_{q_1 q_2} = Q|_{q_2}$. Entonces $Q|_{q_2} = (\lambda^\star x.A)\, B$. Además, tomando $p = 1q_2$, q es descendiente de p y $M|_p = Q|_{q_2}$.

($\Leftarrow$) El razonamiento es similar. En el primer caso, si $M|_p = P|_q = (\lambda^\star x.A)\, B$, entonces $N|_q$ debe ser de la forma $(\lambda^\star x.A\{y := Q\})\, B\{y := Q\}$. En el segundo caso, $M|_p = Q|_{q_2} = N|_q$.

$\Box$

Proposición 2.3.8 (Creación de redexes)**.** Sea $M \in \Lambda^\star$ inicialmente marcado, $M \xrightarrow{\Delta} N$ y $q \in \mathsf{pos}(N)$ tales que hay un λ^w-redex en la posición q de N. Entonces ocurre alguna de las siguientes situaciones:

- **Caso I**: $M = C[(\lambda^\star x.x)\,(\lambda y.A)\, B]$ y $N = C[(\lambda y.A)\, B]_q$.
- **Caso II**: $M = C[(\lambda^\star x.(\lambda y.A))\, Q\, B]$ y $N = C[(\lambda y.A')B]_q$, donde $A' = A\{x := Q\}$.

- **Caso III**: $M = C_1[(\lambda^\star x.C_2[x\,B])\,\lambda y.A]$ y $N = C_1[C_2'[(\lambda y.A)B']_{q_2}]_{q_1}$, donde $q = q_1 \cdot q_2$, $C_2' = C_2\{x := \lambda y.A\}$ y $B' = B\{x := \lambda y.A\}$.
- **Caso IV**: $M = C_1[(\lambda^\star x.C_2[(\lambda y.A)B])\,Q]$ y $N = C_1[C_2'[(\lambda y.A')B']_{q_2}]_{q_1}$, donde $q = q_1 \cdot q_2$, $A' = A\{x := Q\}$, $B' = B\{x := Q\}$, $C_2' = C_2\{x := Q\}$ y $x \in \mathsf{fv}((\lambda y.A)\,B)$.

Demostración. Se consideran tres casos, de acuerdo a las posiciones relativas de p y q. Sean $M|_p = \Delta = (\lambda^\star x.P)\,Q$ el $\lambda^w_\star$-redex que se contrae y $N|_q = (\lambda y.A)\,B$ el λ^w-redex en cuestión.

1. p y q son disjuntas. En tal caso, el λ^w-redex de N ya se encontraba presente en M, lo cual contradice la hipótesis de que M está inicialmente marcado.

2. q está debajo de p, es decir $q = p \cdot p'$ para alguna posición p'. Sea $N \stackrel{\text{def}}{=} M[P\{x := Q\}]_p$. Observar que $P\{x := Q\}|_{p'} = (\lambda y.A)\,B$. En primer lugar, se verá que el λ^w-redex $(\lambda y.A)\,B$ no puede figurar en P ni en Q, pues de lo contrario figuraría también en M, contradiciendo la hipótesis de que M está inicialmente marcado. Es claro que si el término $(\lambda y.A)\,B$ figura en P o en Q también figura en M. Hay que verificar también que se satisfacen las condiciones sobre las variables libres para poder afirmar que dicho término es efectivamente un λ^w-redex en M:

   - Suponer que $p' \in \mathsf{pos}(P)$ y $P|_{p'} = (\lambda y.A)\,B$. Observar que $(\lambda y.A)\,B$ es compatible con $\langle N, q\rangle = \langle N, p \cdot p'\rangle$ porque es un λ^w-redex en N. Además, $(\lambda y.A)\,B$ es compatible con $\langle(\lambda^\star x.P)\,Q, 0 \cdot p'\rangle$ porque $x \notin \mathsf{fv}((\lambda y.A)\,B)$. Entonces $(\lambda y.A)\,B$ es compatible con $\langle M, p \cdot 0 \cdot p'\rangle$, lo que permite deducir que hay un λ^w-redex en la posición $p \cdot 0 \cdot p'$ de M.
   - Suponer que existen $p_1 \in \mathsf{pos}(P)$, $p_2 \in \mathsf{pos}(Q)$ tales que $p' = p_1 \cdot p_2$, $P|_{p_1} = x$, $Q|_{p_2} = (\lambda y.A)\,B$. $(\lambda y.A)\,B$ es compatible con $\langle N, q\rangle = \langle N, p \cdot p_1 \cdot p_2\rangle$, y en particular con $\langle N, p\rangle$ y con $\langle N|_{p \cdot p_1}, p_2\rangle = \langle Q, p_2\rangle$. Por lo tanto, $(\lambda y.A)\,B$ también es compatible con $\langle M, p \cdot 1 \cdot p_2\rangle$, de lo cual se deduce que hay un λ^w-redex en la posición $p \cdot 1 \cdot p_2$ de M.

   Para que se satisfaga $P\{x := Q\}|_{p'} = (\lambda y.A)\,B$, sólo queda la posibilidad de que $P|_{p'} = R$ con $R\{x := Q\} = (\lambda y.A)\,B$. Por lo ya visto, R no puede ser una variable ni una abstracción. Se deduce entonces que R es una aplicación $R_1\,R_2$, que sólo puede tener una de las siguientes formas:

   - $R_1 = x$ y aplica el caso III,
   - $R_1 = \lambda y.A_0$ con $A_0\{x := Q\} = A$ y aplica el caso IV.

3. p está debajo de q, es decir $p = q \cdot q'$ para alguna posición q'. En tal caso, $P\{x := Q\} = N|_p = N|_{q \cdot q'} = N|_q|_{q'} = ((\lambda y.A)B)|_{q'}$. El caso $q' = \epsilon$ ya fue considerado arriba ($q = p \cdot p'$). Esto deja tres posibilidades: que $P\{x := Q\}$ esté en A, que esté en B, o que $P\{x := Q\} = (\lambda y.A)\,B$. Si se diera alguno de los primeros dos casos, se contradiría la hipótesis de que M está inicialmente marcado. Más formalmente:

- Suponer que $\Delta' = P\{x := Q\}$ está contenido en A, es decir $q' = 0 \cdot 0 \cdot r$ y $A|_r = \Delta'$. La contracción ocurre debajo de q, por lo tanto es claro que $M|_q$ debe tener la forma $(\lambda y.A_0)\, B$ con $A_0 = A[\Delta]_r$. Por un lado, los términos $(\lambda y.A)\, B$ y Q deben ser compatibles con el contexto $\langle N, p\rangle = \langle M, p\rangle$, porque $(\lambda y.A)\, B$ es un λ^w-redex en N y $(\lambda^\star x.P)\, Q$ es un $\lambda^w_\star$-redex en M. Además, teniendo en cuenta que A se obtiene contrayendo Δ en A_0, por propiedades de la sustitución se puede ver que $\mathsf{fv}((\lambda y.A_0)\, B) \subseteq \mathsf{fv}((\lambda y.A)B) \cup \mathsf{fv}(Q)$. Entonces $(\lambda y.A_0)\, B$ es también compatible con $\langle M, p\rangle$, y por lo tanto un λ^w-redex en la posición q de M.
- Suponer que $\Delta' = P\{x := Q\}$ está contenido en B, es decir $q' = 1 \cdot r$ y $B|_r = \Delta'$. En este caso, $M|_q$ debe tener la forma $(\lambda y.A)\, B_0$ con $B_0 = B[\Delta]_r$. De manera similar al caso anterior, tanto $(\lambda y.A)\, B$ como Q son compatibles con el contexto $\langle M, p\rangle$ y $\mathsf{fv}((\lambda y.A)\, B_0) \subseteq \mathsf{fv}((\lambda y.A)\, B)$, de donde se concluye que $(\lambda y.A)\, B_0$ es un λ^w-redex en la posición q de M.

Sólo resta considerar el tercer caso, es decir $q' = 0$ y $P\{x := Q\} = (\lambda y.A)\, B$. Los términos sólo pueden tener una de las siguientes formas:

- $P = \lambda y.A_0$ con $A_0\{x := Q\} = A$ y aplica el caso II,
- $P = x$ y $Q = \lambda y.A$ y aplica el caso I.

□

A.2. Propiedades de la sustitución

Lema 3.3.1. $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A)^a, B)) \supseteq \mathsf{fv}(A^{\{-a\}}\{x := B\})$

Demostración. Por inducción en A.

- Si $A = x$, es trivial.
- Si $A = y \neq x$, es trivial.
- Si $A = \lambda^b y.A'$, entonces, ya sea que $a = b$ o $a \neq b$:
  $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.\lambda^b y.A')^a, B)) =$
  $= (\mathsf{fv}(A') \setminus \{x, y\}) \cup \mathsf{fv}(B)$ por definición
  $= (\mathsf{fv}(\lambda^a x.A') \setminus \{y\}) \cup \mathsf{fv}(B)$
  $= (\mathsf{fv}(\lambda^a x.A') \cup \mathsf{fv}(B)) \setminus \{y\}$ pues, por convención, y no ocurre libre en B
  $\supseteq (\mathsf{fv}(A'^{\{-a\}}\{x := B\})) \setminus \{y\}$ por h.i.
  $= \mathsf{fv}((\lambda^b y.A')^{\{-a\}}\{x := B\})$
- Si $A = @({A_1}^b, A_2)$, por hipótesis inductiva se tiene:
  $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A_i)^a, B)) \supseteq \mathsf{fv}(A_i^{\{-b\}}\{x := B\})$ para $i \in \{1, 2\}$
  de donde se prueba lo deseado operando con conjuntos de manera similar al caso anterior.

□

Lema 3.3.2. $\mathsf{fl}(@((\lambda^a x.A)^a, B)) \supseteq \mathsf{fl}(A^{\{-a\}}\{x := B\})$

Demostración. Directo por inducción en A. El caso interesante es $A = \lambda^b y.A'$. Cuando $a = b$, la etiqueta b no está libre del lado izquierdo, y en el lado derecho tampoco porque la borra el operador $^{\{-a\}}$. Cuando $a \neq b$, la etiqueta b está libre a ambos lados de la ecuación. □

Lema 3.3.3. $A\{x := B\}^{\{-a\}} = A^{\{-a\}}\{x := B^{\{-a\}}\}$

Demostración. Por inducción en A.

- Si $A = x$ o bien $A = y \neq x$, es trivial.
- Si $A = \lambda^a y.A_1$, entonces $A^{\{-a\}}\{x := B^{\{-a\}}\} = \lambda^\star y.{A_1}^{\{-a\}}\{x := B^{\{-a\}}\} = \lambda^\star y.A_1\{x := B\}^{\{-a\}} = A\{x := B\}^{\{-a\}}$ usando la h.i. sobre A_1.
- Si $A = \lambda^b y.A_1$ con $b \neq a$, el razonamiento es similar al del caso anterior.
- Si $A = @({A_1}^b, A_2)$, se asume que $b \neq a$ por convención. (Recordar que las aplicaciones ligan etiquetas, de modo que esto puede conseguirse renombrando las ocurrencias de b). Teniendo esto en cuenta, la prueba es directa utilizando la h.i. sobre A_1 y A_2.

□

A.3. Finitud de los superdevelopments

Propiedad 3.4.4. $\textsc{rval}(x) = 0$

Demostración. La suma es vacía pues no contiene ninguna aplicación. □

Propiedad 3.4.5. $\textsc{rval}(\lambda^a x.A) = \textsc{rval}(A)$

Demostración. Todas las aplicaciones en $\lambda^a x.A$ están también en $\textsc{rval}(A)$. Además $\textsc{rf}(\lambda^a x.C) = \textsc{rf}(C)$ por definición. □

Propiedad 3.4.6. Si $A = @({A_1}^a, A_2)$, entonces $\textsc{rval}(A) =$
$= 1 + \textsc{rval}(A_1) + \textsc{rval}(A_2) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\textsc{rf}_x(B)\}, 1\}$ donde $\lambda^a x.B \subseteq A_1$

Demostración. $\textsc{rval}(A) =$
$= \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A)} \textsc{rf}(\langle A, p\rangle)$
$= \textsc{rf}(\langle A, \epsilon\rangle) + \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A_1)} \textsc{rf}(\langle A, 0 \cdot p\rangle) + \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A_2)} \textsc{rf}(\langle A, 1 \cdot p\rangle)$
$= \textsc{rf}(\langle A, \epsilon\rangle) + \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A_1)} \textsc{rf}(@(\langle A_1, p\rangle^a, A_2)) + \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A_2)} \textsc{rf}(@({A_1}^a, \langle A_2, p\rangle))$
$= \textsc{rf}(\langle A, \epsilon\rangle) + \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A_1)} \textsc{rf}(\langle A_1, p\rangle) + \sum_{p \in \mathsf{posApp}(A_2)} \textsc{rf}(\langle A_2, p\rangle) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\textsc{rf}_x(B)\}, 1\}$
donde $\lambda^a x.B \subseteq A_1$
$= 1 + \textsc{rval}(A_1) + \textsc{rval}(A_2) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\textsc{rf}_x(B)\}, 1\}$ donde $\lambda^a x.B \subseteq A_1$. □

Propiedad 3.4.7. $\text{RF}(C_1[C_2]) = \text{RF}(C_1) \cdot \text{RF}(C_2)$

Demostración. Por inducción en C_1:

- Si $C_1 = \square$, $\text{RF}(\square[C_2]) = 1 \cdot \text{RF}(C_2)$.

- Si $C_1 = \lambda^a x.C_1'$, entonces $\text{RF}(\lambda^a x.C_1'[C_2]) =$
  $= \text{RF}(C_1'[C_2])$ por definición
  $= \text{RF}(C_1') \cdot \text{RF}(C_2)$ por h.i.
  $= \text{RF}(\lambda^a x.C_1') \cdot \text{RF}(C_2)$ por definición.

- Los casos $C_1 = @(C_1'^{a}, A)$ y $C_1 = @(A^\star, C_1')$ son similares al anterior y se reducen a aplicar la hipótesis inductiva.

- Si $C_1 = @(A^a, C_1')$, entonces $\text{RF}(@(A^a, C_1'[C_2])) =$
  $= \text{RF}(C_1'[C_2]) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\text{RF}_x(B)\}, 1\}$ donde $\lambda^a x.B \subseteq A$
  $= \text{RF}(C_1') \cdot \text{RF}(C_2) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_B\{\text{RF}_x(B)\}, 1\}$ por h.i.
  $= \text{RF}(@(A^a, C_1')) \cdot \text{RF}(C_2)$ por definición.

□

Propiedad 3.4.8. Si $p \in \mathsf{posApp}(C)$, entonces $\text{RF}(\langle C, p\rangle) = \text{RF}(\langle C[A], p\rangle)$.

Demostración. Por inducción en C.

- Si $C = \square$, es trivial.

- Si $C = \lambda^a x.C'$, entonces $p = 0 \cdot p'$. Por lo tanto, $\text{RF}(\langle \lambda^a x.C'[A], p\rangle) =$
  $= \text{RF}(\lambda^a x.\langle C'[A], p'\rangle)$
  $= \text{RF}(\langle C'[A], p'\rangle)$ por definición
  $= \text{RF}(\langle C', p'\rangle)$ por h.i.
  $= \text{RF}(\langle \lambda^a x.C', p\rangle)$.

- Los casos $C = @(C'^a, B)$ y $C = @(B^\star, C')$ son similares al anterior y se reducen a aplicar la hipótesis inductiva.

- Si $C = @(B^a, C')$, se pueden considerar tres casos: $(p = \epsilon)$, $(p = 0 \cdot p')$ y $(p = 1 \cdot p')$. Los primeros dos son directos. Sea $p = 1 \cdot p'$. Entonces $\text{RF}(\langle @(B^a, C'[A]), 1.p'\rangle) =$
  $= \text{RF}(@(B^a, \langle C'[A], p'\rangle))$
  $= \text{RF}(\langle C'[A], p'\rangle) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_{B'}\{\text{RF}_x(B')\}, 1\}$ donde $\lambda^a x.B' \subseteq B$
  $= \text{RF}(\langle C', p'\rangle) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_{B'}\{\text{RF}_x(B')\}, 1\}$ por h.i.
  $= \text{RF}(\langle @(B^a, C'), p\rangle)$

□

Propiedad 3.4.9. $\text{RVAL}(C[A]) = \text{RVAL}(C) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A)$

Demostración. $\text{RVAL}(C[A]) =$

$= \sum_{p\in\text{posApp}(C[A])} \text{RF}(\langle C[A], p\rangle)$ por definición

$= \sum_{p\in\text{posApp}(C)} \text{RF}(\langle C[A], p\rangle) + \sum_{p\in\text{posApp}(A)} \text{RF}(C[\langle A, p\rangle])$
separando los casos $p \in \mathsf{pos}(C)$ y $p \notin \mathsf{pos}(C)$

$= \sum_{p\in\text{posApp}(C)} \text{RF}(\langle C[A], p\rangle) + \sum_{p\in\text{posApp}(A)} \text{RF}(C) \cdot \text{RF}(\langle A, p\rangle)$
por Propiedad 3.4.7

$= \sum_{p\in\text{posApp}(C)} \text{RF}(\langle C, p\rangle) + \sum_{p\in\text{posApp}(A)} \text{RF}(C) \cdot \text{RF}(\langle A, p\rangle)$ por Propiedad 3.4.8

$= \text{RVAL}(C) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A)$ por definición. □

Propiedad 3.4.10. $\text{RF}(C^{\{-b\}}\{x := A\}) = \text{RF}(C)$

Demostración. Por inducción en C.

- Si $C = \Box$, es trivial.
- Si $C = \lambda^a y.C'$, y $a \neq b$, entonces $\text{RF}(\lambda^a y.C'^{\{-b\}}\{x := A\}) =$
  $= \text{RF}(C'^{\{-b\}}\{x := A\})$ por definición
  $= \text{RF}(C')$ por h.i.
  $= \text{RF}(\lambda^a y.C')$.
  Si $a = b$, la demostración es similar.
- Los casos $C = @(C'^a, B)$ y $C = @(B^\star, C')$ son similares al anterior y se reducen a aplicar la hipótesis inductiva.
- Si $C = @(B^a, C')$, se observa primero que $a \neq b$ porque a es una etiqueta ligada y, por convención, se puede renombrar. Entonces:
  $\text{RF}(@(B^{\{-b\}}\{x := A\}^a, C'^{\{-b\}}\{x := A\})) =$
  $= \text{RF}(C'^{\{-b\}}\{x := A\}) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_{B'}\{\text{RF}_y(B')\}, 1\}$
  donde $\lambda^a y.B' \subseteq B^{\{-b\}}\{x := A\}$ por definición
  $= \text{RF}(C') \cdot \text{máx}\{\text{máx}_{B'}\{\text{RF}_y(B')\}, 1\}$ por h.i.
  $= \text{RF}(C') \cdot \text{máx}\{\text{máx}_{B''}\{\text{RF}_y(B'')\}, 1\}$ donde $\lambda^a y.B'' \subseteq B$ por $(\star)$
  $= \text{RF}(@(B^a, C'))$

Sólo falta demostrar el paso $(\star)$. Dado que $\text{RF}()$ y $\text{RF}_x()$ se definen de manera mutuamente recursiva, es natural que la demostración requiera dos inducciones anidadas.

Lo que falta demostrar es que:

$$\underset{B'}{\text{máx}}\{\text{RF}_y(B')\} = \underset{B''}{\text{máx}}\{\text{RF}_y(B'')\}$$

donde $B' \subseteq B^{\{-b\}}\{x := A\}$ y $B'' \subseteq B$. Además, $a \notin \mathsf{fl}(A)$ por convención. Para ello se prueba una afirmación más fuerte: que los conjuntos sobre los que se toma el máximo son iguales.

Afirmación: Dado $B \in \Lambda_\ell$, sea B_1 el conjunto de los términos B' tales que $\lambda^a y.B' \subseteq B$. Sea además B_2 el conjunto de los términos B'' tales que $\lambda^a y.B'' \subseteq B^{\{-b\}}\{x := A\}$, con $a \notin \mathsf{fl}(A)$. Entonces $\{\textsc{rf}_y(B') \mid B' \in B_1\} = \{\textsc{rf}_y(B'') \mid B'' \in B_2\}$. La demostración procede por inducción en B.

- Si $B = x$, entonces no puede ocurrir que $\lambda^a y.B'' \subseteq B^{\{-b\}}\{x := A\}$ pues $a \notin \mathsf{fl}(A)$. Por lo tanto $B_1 = B_2 = \emptyset$.
- Si $B = z \neq x$, también $B_1 = B_2 = \emptyset$.
- Si $B = \lambda^c z.D$. Sean D_1 el conjunto de los B' tales que $\lambda^a y.B' \subseteq D$ y D_2 el conjunto de los B'' tales que $\lambda^a y.B'' \subseteq D^{\{-b\}}\{x := A\}$.

  Si $c = b$ o bien $a \neq c$, es trivial por h.i., pues en ambos casos $B_1 = D_1$ y $B_2 = D_2$.

  Si $a = c \neq b$, entonces:

  - $B_1 = \{\lambda^a y.D\} \cup D_1$
  - $B_2 = \{\lambda^a y.D^{\{-b\}}\{x := A\}\} \cup D_2$

  Se puede ver además que $\textsc{rf}_y(D) = \textsc{rf}_y(D^{\{-b\}}\{x := A\})$, lo cual es suficiente para obtener $B_1 = B_2$.
  $\textsc{rf}_y(D^{\{-b\}}\{x := A\}) =$
  $= \sum_{p\in\mathsf{pos}_y(D^{\{-b\}}\{x:=A\})} \textsc{rf}(\langle D^{\{-b\}}\{x := A\}, p\rangle)$ por definición
  $= \sum_{p\in\mathsf{pos}_y(D)} \textsc{rf}(\langle D, p\rangle^{\{-b\}}\{x := A\})$
  puesto que $y \notin \mathsf{fv}(A)$ por convención de variables
  $= \sum_{p\in\mathsf{pos}_y(D)} \textsc{rf}(\langle D, p\rangle)$ por inducción externa
  $= \textsc{rf}_y(D)$ por definición.
- Si $B = @(D^a, E)$, es directo por hipótesis inductiva. Definiendo los conjuntos D_1, D_2, E_1, E_2 de manera análoga a los del caso anterior, se ve que $B_1 = D_1 \cup E_1$ y $B_2 = D_2 \cup E_2$.

$\square$

Propiedad 3.4.11. $\textsc{rval}(A^{\{-b\}}\{x := B\}) = \textsc{rval}(A) + \textsc{rval}(B) \cdot \textsc{rf}_x(A)$

Demostración. $\textsc{rval}(A^{\{-b\}}\{x := B\}) =$

$= \sum_{p\in\mathsf{posApp}(A^{\{-b\}}\{x:=B\})} \textsc{rf}(\langle A^{\{-b\}}\{x := B\}, p\rangle)$ por definición

$= \sum_{p\in\mathsf{posApp}(A)} \textsc{rf}(\langle A^{\{-b\}}\{x := B\}, p\rangle) +$
$\sum_{p\in\mathsf{pos}_x(A)} \sum_{q\in\mathsf{posApp}(B)} \textsc{rf}(\langle A^{\{-b\}}\{x := B\}, p \cdot q\rangle)$
separando los casos $p \in \mathsf{pos}(A)$ y $p \notin \mathsf{pos}(A)$

$= \sum_{p\in\mathsf{posApp}(A)} \textsc{rf}(\langle A^{\{-b\}}\{x := B\}, p\rangle) +$
$\sum_{p\in\mathsf{pos}_x(A)} \sum_{q\in\mathsf{posApp}(B)} \textsc{rf}(\langle A^{\{-b\}}\{x := B\}, p\rangle[\langle B, q\rangle])$

$= \sum_{p\in\mathsf{posApp}(A)} \textsc{rf}(\langle A, p\rangle) + \sum_{p\in\mathsf{pos}_x(A)} \sum_{q\in\mathsf{posApp}(B)} \textsc{rf}(\langle A, p\rangle) \cdot \textsc{rf}(\langle B, q\rangle)$
por Propiedad 3.4.7 y Propiedad 3.4.10

$= \text{RVAL}(A) + \sum_{p \in \mathsf{pos}_x(A)} \sum_{q \in \mathsf{posApp}(B)} \text{RF}(\langle A, p \rangle) \cdot \text{RF}(\langle B, q \rangle)$
  por definición de $\text{RVAL}()$

$= \text{RVAL}(A) + (\sum_{p \in \mathsf{pos}_x(A)} \text{RF}(\langle A, p \rangle)) \cdot (\sum_{q \in \mathsf{posApp}(B)} \text{RF}(\langle B, q \rangle))$

$= \text{RVAL}(A) + \text{RF}_x(A) \cdot \text{RVAL}(B)$ □

Propiedad 3.4.12. Si $A \xrightarrow{L}_\ell B$, entonces $\text{RVAL}(A) > \text{RVAL}(B)$.

Demostración. Sea $A = C[@((\lambda^a x.A_1)^a, A_2)] \xrightarrow{L}_\ell C[A_1{}^{\{-a\}}\{x := A_2\}] = B$.
Entonces:

$\text{RVAL}(A)$
$= \text{RVAL}(C[@((\lambda^a x.A_1)^a, A_2)])$ por definición
$= \text{RVAL}(C) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(@((\lambda^a x.A_1)^a, A_2))$ por Propiedad 3.4.9
$= \text{RVAL}(C) + \text{RF}(C) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A_1) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A_2) \cdot \text{máx}\{\text{máx}_{B'}\{\text{RF}_y(B')\}, 1\}$
  donde $\lambda^a y.B' \subseteq \lambda^a x.A_1$, por Propiedad 3.4.6.

$\text{RVAL}(B)$
$= \text{RVAL}(C[A_1{}^{\{-a\}}\{x := A_2\}])$ por definición
$= \text{RVAL}(C) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A_1{}^{\{-a\}}\{x := A_2\})$ por Propiedad 3.4.9
$= \text{RVAL}(C) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A_1) + \text{RF}(C) \cdot \text{RVAL}(A_2) \cdot \text{RF}_x(A_1)$ por Propiedad 3.4.11.

Es claro que, si $\lambda^a y.B' \subseteq \lambda^a x.A_1$, entonces $\text{máx}_{B'}\{\text{RF}_y(B')\} \geq \text{RF}_x(A_1)$ porque en particular se puede tomar $\lambda^a y.B' = \lambda^a x.A_1$. Por lo tanto $\text{RVAL}(A) \geq \text{RVAL}(B) + \text{RF}(C)$. Además, $\text{RF}(C) > 0$, con lo cual $\text{RVAL}(A) > \text{RVAL}(B)$. □

A.4. Reducción etiquetada

Lema 3.5.1. Si $A \xrightarrow{L}_\ell B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(B)$.

Demostración. Sean $A = C[@(\lambda^a x.B_1{}^a, B_2)]$ y $A' = C[B_1{}^{\{-a\}}\{x := B_2\}]$. Se prueba $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(A')$ por inducción en C:

- Si $C = \Box$, es consecuencia de Lema 3.3.1.
- Los casos $C = \lambda^b x.C$, $C = @(C'^b, D)$ y $C = @(D^b, C')$ son directos por h.i.

□

Lema 3.5.2. Si $A \xrightarrow{L}_\ell B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \cap L = \mathsf{fv}(B) \cap L$.

Demostración. Sea $A = C[\Delta] \xrightarrow{L}_{\ell} C[\Delta'] = B$ donde Δ es el redex que se contrae. Por definición de la reducción etiquetada, $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow L$. Usando el lema anterior se ve también que $\mathsf{fv}(\Delta') \uparrow L$.

Es claro entonces que si A ó B contienen variables en L, deben ocurrir en el contexto, ya que no ocurren en Δ ni en Δ'. Es decir:
$\mathsf{fv}(A) \cap L = \mathsf{fv}(C) \cap L = \mathsf{fv}(B) \cap L$.

□

Lema 3.5.3. Sea $A \xrightarrow{L}_{\ell} B$.

1. Si $K \subseteq L$, entonces $A \xrightarrow{K}_{\ell} B$.
2. Si $K \uparrow \mathsf{fv}(A)$ entonces $A \xrightarrow{L \cup K}_{\ell} B$.

Demostración. En el primer caso, en la definición de $\xrightarrow{L}_{\ell}$ se requiere $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C) \cup K$. Esta condición obviamente se cumple dado que $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C) \cup L$.

En el segundo caso, $A = C[\Delta] \xrightarrow{L}_{\ell} B$, donde Δ es el redex que se contrae y $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C)$. Por hipótesis, $K \uparrow \mathsf{fv}(M)$, y por lo tanto (asumiendo la convención de variables) $K \uparrow \mathsf{fv}(\Delta)$. Entonces $A \xrightarrow{L \cup K}_{\ell} B$.

□

Lema 3.5.4.

Sea $A \to_{\ell} B$ un paso de reducción en el que se contrae un redex Δ. Entonces:

(1) $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow L$ si y sólo si $C[A] \to_{\ell} C[B]$ para todo contexto C tal que $\mathsf{bp}(C) = L$.

(2) $C_1[C_2[\Delta]] \xrightarrow{L}_{\ell} C_1[C_2[\Delta']]$ si y sólo si $C_2[\Delta] \xrightarrow{L \cup \mathsf{bp}(C_1)}_{\ell} C_2[\Delta']$, donde Δ' es el redex que se contrajo.

Demostración. Directa aplicando las definiciones:

(1) Sea $A = C_1[\Delta] \to_{\ell} C_1[\Delta'] = B$. Se observa primero que $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C[C_1]) = L \cup \mathsf{bp}(C_1)$ por definición de $\to_{\ell}$.

  ($\Rightarrow$) Si $\mathsf{bp}(C) = L$, entonces $C[C_1[\Delta]] \to_{\ell} C[C_1[\Delta']]$ pues $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C[C_1])$.

  ($\Leftarrow$) Si $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C[C_1])$, entonces en particular $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow \mathsf{bp}(C) = L$.

(2) Es consecuencia del caso (1), observando los siguientes hechos:

- $C_1[C_2[\Delta]] \xrightarrow{L}_{\ell} C_1[C_2[\Delta']]$ si y sólo si $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow L \cup \mathsf{bp}(C_1) \cup \mathsf{bp}(C_2)$.
- $C_2[\Delta] \xrightarrow{L \cup \mathsf{bp}(C_1)}_{\ell} C_2[\Delta']$ si y sólo si $\mathsf{fv}(\Delta) \uparrow L \cup \mathsf{bp}(C_1) \cup \mathsf{bp}(C_2)$.

□

Lema 3.5.5. Si $A \xrightarrow{L}_{\ell} B$, entonces $A^{\{-a\}} \xrightarrow{L}_{\ell} B^{\{-a\}}$.

Demostración. Si $A = C[\Delta] \xrightarrow{L}_\ell C[\Delta'] = B$, donde Δ es el redex que se contrae en este paso, se prueba por inducción en C. El caso interesante es cuando $C = \Box$, y se reduce a observar que:
$\Delta = @((\lambda^b x.B_1{}^{\{-a\}})^b, B_2{}^{\{-a\}})$
$\xrightarrow{L}_\ell B_1{}^{\{-a\}}\{x := B_2{}^{\{-a\}}\}$
$= B_1\{x := B_2\}^{\{-a\}} = \Delta'$ por Lema 3.3.3. $\Box$

Lema 3.5.6. Sean $A \xrightarrow{L}_\ell A'$ un paso de reducción y $B \in \Lambda_\ell$ de tal forma que $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Entonces $A\{x := B\} \xrightarrow{L}_\ell A'\{x := B\}$.

Demostración. Por inducción en A.

- Si $A = y$, es trivial.
- Si A es una abstracción, $A = \lambda^a y.A_1 \xrightarrow{L}_\ell \lambda^a y.A'_1 = A'$, y entonces $A_1 \xrightarrow{y \cdot L}_\ell A'_1$. Por h.i., $A_1\{x := B\} \xrightarrow{y \cdot L}_\ell A'_1\{x := B\}$ y por lo tanto $A\{x := B\} \xrightarrow{L}_\ell A'\{x := B\}$. Notar que es necesario asumir la convención de variables para garantizar que $y \notin \mathsf{fv}(B)$. Se utiliza el Lema 3.5.4 (2) para la equivalencia entre $\lambda^a x.A \xrightarrow{L}_\ell \lambda^a x.B$ y $A \xrightarrow{x \cdot L}_\ell B$.
- Si A es una aplicación $@(A_1{}^a, A_2)$ y la reducción es interna en A_1, entonces $@(A_1{}^a, A_2) \xrightarrow{L}_\ell @(A'_1{}^a, A_2) = A'$, donde además $A_1 \xrightarrow{L}_\ell A'_1$. Utilizando la h.i. se tiene que $A_1\{x := B\} \xrightarrow{L}_\ell A'_1\{x := B\}$, de donde $A\{x := B\} \xrightarrow{L}_\ell A'\{x := B\}$. Es análogo si la reducción es interna en A_2.
- Si A es una aplicación y la reducción ocurre en la raíz, entonces $A = @(\lambda^a y.A_1{}^a, A_2)$ y $A' = A_1{}^{\{-a\}}\{y := A_2\}$. Por definición de sustitución, $A\{x := B\} = @(\lambda^a y.A_1\{x := B\}^a, A_2\{x := B\})$. Observar que $A\{x := B\}$ es un redex bajo $\xrightarrow{L}_\ell$ porque, por hipótesis, $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Aplicando un paso de reducción, se tiene entonces que $A\{x := B\} \xrightarrow{L}_\ell A_1\{x := B\}^{\{-a\}}\{y := A_2\{x := B\}\}$. Utilizando las propiedades usuales de la sustitución y el lema anterior, se concluye que $A\{x := B\} \xrightarrow{L}_\ell A_1{}^{\{-a\}}\{y := A_2\}\{x := B\} = A'\{x := B\}$.

$\Box$

A.5. Reducción simultánea

Propiedad 4.2.2 ($\overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell$ **es reflexiva).** $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell A$.

Demostración. Por inducción en A.

- Si $A = x$, es trivial.
- Si $A = \lambda^a x.A'$, se prueba usando la h.i. por la regla $\mathsf{LAbs1}$.

- Si $A = @(A_1{}^a, A_2)$, se prueba usando la h.i. por la regla $\mathsf{LApp1}$.

□

Propiedad 4.2.3. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fl}(A) \supseteq \mathsf{fl}(B)$.

Demostración. Por inducción en la derivación del juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$. El único caso no trivial es el de la regla $\mathsf{LApp2}$, que se reduce a aplicar el Lema 3.3.1 y el Lema 3.3.2. □

Lema 4.2.4. Si $L' \subseteq L$ y $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces $A \overset{L',k}{\Rightarrow_\ell} B$.

Demostración. Por inducción en la derivación del juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$. El único caso interesante es el de la regla $\mathsf{LApp2}$. La observación importante es que si $@((\lambda^a x.A_1')^a, A_2') \uparrow L$ entonces $@((\lambda^a x.A_1')^a, A_2') \uparrow L'$. Es decir, si se permitía la contracción del redex en un contexto L, también se permite en un contexto menos restrictivo L'. □

Lema 4.2.5. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces existen variables x_i y etiquetas a_i, con $1 \leq i \leq k$, y un término $B' \in \Lambda_\ell$ tales que $B = \lambda^{a_1 \dots a_k} x_1 \dots x_k.B'$.

Demostración. Por inducción en la derivación del juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$.

- Si el juicio resulta de aplicar las reglas LVar, $\mathsf{LAbs1}$ o $\mathsf{LApp1}$, es trivial pues $k = 0$.

- Si el juicio resulta de aplicar $\mathsf{LAbs2}$, se tiene que $\lambda^a x.A' \overset{L,k+1}{\Rightarrow_\ell} \lambda^a x.B'$ y que $A' \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B'$. Por h.i., B' tiene k abstracciones en la raíz, y por lo tanto $\lambda^a x.B'$ tiene $k+1$ abstracciones en la raíz.

- Si el juicio resulta de aplicar $\mathsf{LApp2}$, se tiene:

  - $A_1 \overset{L,n+1}{\Rightarrow_\ell} \lambda^a x.A_1' = \lambda^{aa_1 \dots a_n} x x_1 \dots x_n.A_1''$ por h.i.
  - $A_2 \overset{L,m}{\Rightarrow_\ell} A_2' = \lambda^{b_1 \dots b_m} y_1 \dots y_m.A_2''$ por h.i.

  Para no recargar la notación, se asumirá primero que las etiquetas $a_1 \dots a_n$ son todas diferentes de a.

  Si $m = 0$, es evidente que $\lambda^{a_1 \dots a_n} x_1 \dots x_n.A_1''^{\{-a\}}\{x := A_2'\}$ tiene n abstracciones en la raíz.

  Si $m > 0$, se sabe además, por aplicación de la regla $\mathsf{LApp2}$, que $A_1'' = x$. Por lo tanto: $\lambda^{a_1 \dots a_n} x_1 \dots x_n.A_1''^{\{-a\}}\{x := A_2'\} = \lambda^{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m} x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m.A_2''$.

  Si ocurre que $a_i = a$ para algún i, la demostración es igual, con la única diferencia de que la etiqueta a_i se reemplaza por $\star$ cuando se aplica el operador ${}^{\{-a\}}$.

□

A.5.1. Resultado de los superdevelopments débiles completos

Lema 4.2.11. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces $A \succ B$.

Demostración. Por inducción en A.

- Si $x \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} x$, es trivial.
- Si $\lambda^a x.A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} \lambda^a x.A'$, se reduce a aplicar la h.i., tanto para la regla $\mathsf{LAbs1}$ como para la regla $\mathsf{LAbs2}$.
- Si $@({A_1}^a, A_2) \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, se tiene que $\mathsf{fv}(@({A_1}^a, A_2)) \supseteq \mathsf{fv}(B)$ por Propiedad 4.2.3, y por lo tanto $@({A_1}^a, A_2) \succ B$.

□

Lema 4.2.12. Si existe un B tal que $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$, entonces $A^{\{*\}}_{L,k}$ es no vacío y $B \succ A^*_{L,k}$ para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$.

Demostración. Por inducción en la derivación del juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$.

- Los casos LVar, $\mathsf{LAbs1}$ y $\mathsf{LAbs2}$ son triviales aplicando la hipótesis inductiva.
- En el caso $\mathsf{LApp1}$, sea $A = @({A_1}^a, A_2) \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} @({B_1}^a, B_2)$ con $A_i \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} B_i$ para $i \in \{1, 2\}$. Por h.i., existen términos ${A_i}^*_{L,0}$. Si A es $(L, 0)$-aplicable, entonces $A^*_{L,0}$ seguro existe. Si A no es $(L, 0)$-aplicable, dado que $k = 0$, se utiliza el segundo caso de la definición del resultado de los superdevelopments completos para la aplicación, obteniendo que $A^*_{L,0} = @({{A_1}^*_{L,0}}^a, {A_2}^*_{L,0})$ también existe.
- En el caso $\mathsf{LApp2}$, se tiene, para $n + m = k$:
  - $A_1 \overset{L,n+1}{\Rightarrow_\ell} \lambda^a x.B_1 \succ {A_1}^*_{L,n+1}$, por lo tanto ${A_1}^*_{L,n+1} = \lambda^a x.D$
  - $A_2 \overset{L,m}{\Rightarrow_\ell} B_2 \succ {A_2}^*_{L,m}$
  - Dado que $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A_1)^a, A_2)) \uparrow L$, se concluye que $\mathsf{fv}(@({{A_1}^*_{L,n+1}}^a, {A_2}^*_{L,m})) \uparrow L$ por la Observación 4.2.10 (3).
  - En el caso $m > 0$, se tiene que $B_1 = \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.x$. Puesto que $B_1 \succ D$, se concluye que $B_1 = D$.

  Por lo tanto, A es (L, k)-aplicable y existe $A^*_{L,k} = D^{\{-a\}}\{x := {A_2}^*_{L,m}\}$. Sólo resta verificar que ${B_1}^{\{-a\}}\{x := B_2\} \succ A^*_{L,k}$, lo cual es consecuencia de la Observación 4.2.10 (4).

□

Corolario 4.2.13. $A^{\{*\}}_{L,0}$ es no vacío.

Demostración. Usando la Propiedad 4.2.2 se tiene que $A \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} A$ y, por el lema anterior, existe $A^*_{L,0}$. □

Lema 4.2.14. $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} A^*_{L,k}$ para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$. Notar que $A^{\{*\}}_{L,k}$ puede ser vacío.

Demostración. Por inducción en A:

- $x \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} x^*_{L,0}$ es trivial.
- Si $A = \lambda^a x.A'$, si $k = 0$, $\lambda^a x.A' \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} (\lambda^a x.A')^*_{L,0}$ se deduce de la h.i.: $A' \overset{x\cdot L,0}{\Rightarrow_\ell} A'^*_{x\cdot L,0}$ por aplicación de $\mathsf{LAbs1}$.
- Para $k+1$, $\lambda^a x.A' \overset{L,k+1}{\Rightarrow_\ell} (\lambda^a x.A')^*_{L,k+1}$ se deduce de la h.i.: $A' \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} A'^*_{L,k}$ por aplicación de $\mathsf{LAbs2}$.
- Si $A = @(A_1{}^a, A_2)$ y A es (L,k)-aplicable, entonces existen n, m tales que $n + m = k$ y además:
  - $A_1 \overset{L,n+1}{\Rightarrow_\ell} \lambda^a x.A'_1 = \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A''_1$ por h.i.
  - $A_2 \overset{L,m}{\Rightarrow_\ell} A'_2 = \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A''_2$ por h.i.
  - Si $m > 0$, entonces $A''_1 = x$
  - $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A'_1)^a, A'_2)) \uparrow L$

  Por lo tanto se dan exactamente las condiciones requeridas para aplicar la regla $\mathsf{LApp2}$. El resultado del superdevelopment completo, $A_1'^{\{-a\}}\{x := A'_2\}$ coincide exactamente con el lado derecho del juicio que se deriva al aplicar la regla. Notar que este paso no depende de la unicidad del resultado de los superdevelopments completos, y serviría para cualquier par n, m que cumpla con estas propiedades.
- Si A no es (L,k)-aplicable, entonces $k = 0$ y $A^*_{L,0} = @(A_1{}^*_{L,0}{}^a, A_2{}^*_{L,0})$. El resultado deseado se concluye por h.i., aplicando la regla $\mathsf{LApp1}$.

□

Corolario 4.2.15. Para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$, se tiene que $\mathsf{fv}(A) \supseteq \mathsf{fv}(A^*_{L,k})$ y $\mathsf{fl}(A) \supseteq \mathsf{fl}(A^*_{L,k})$.

Demostración. Recurriendo al lema anterior y a la Propiedad 4.2.3. □

Corolario 4.2.16. Para todo $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$, se tiene que $A^*_{L,k}$ es de la forma $\lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.A'$.

Demostración. Es consecuencia del lema anterior y el Lema 4.2.5. □

Lema 4.2.17. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $a \notin \mathsf{fl}(B)$, $x \notin \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Entonces:

1. Si $A^*_{L,k} = \lambda^a x.A'$, entonces $A' = B^*_{L,k-1}$ para algún B.

   Más precisamente, sea $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$. Si $A^*_{L,k} = \lambda^a x.A'$ con $k > 0$, entonces existen un B y un $B^*_{L,k} \in B^{\{*\}}_{L,k}$ tales que $A' = B^*_{L,k-1}$. Además, si $A^*_{L,k}$ es único, $B^*_{L,k}$ es único.

2. ${A^*_{L,k}}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} = A^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,k}$.

   Más precisamente, se prueba que son iguales:

   - El conjunto de los ${A^*_{L,k}}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}$ tales que $A^*_{L,k} \in A^{\{*\}}_{L,k}$ y $B^*_{L,0} \in B^{\{*\}}_{L,0}$.
   - El conjunto $A^{\{-a\}}\{x := B\}^{\{*\}}_{L,k}$.

Demostración. Se demuestra por inducción la conjunción de los dos ítems, ya que dependen mutuamente uno del otro.

1. Asumiendo la h.i. para ambos ítems, se prueba el ítem 1. El único caso que no se reduce directamente a aplicar la h.i., es cuando $A = @({A_1}^a, A_2)$ es (L, k)-aplicable.

   En este caso, existen n, m tales que $n + m = k$, con:

   - ${A_1}^*_{L,n+1} = \lambda^a x.A'_1$
   - ${A_2}^*_{L,m} = A'_2$
   - $A^*_{L,k+1} = {A'_1}^{\{-a\}}\{x := A'_2\}$

   Considerando que si $m > 0$ entonces A'_1 es de la forma $\lambda^{\overline{c}^n}\overline{z}^n.x$, pueden ocurrir los siguientes casos:

   a) Cuando $m > 0$ y $n > 0$, se tiene que:

   $$\begin{aligned} {A_1}^*_{L,n+1} &= \lambda^a x.\lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^{n-1}}\overline{x}^{n-1}.x \\ {A_2}^*_{L,m} &= \lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.A''_2 \end{aligned}$$

   Por h.i., existe un B_2 tal que ${A_2}^*_{L,m} = \lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.{B_2}^*_{L,0}$. Tomando $B = \lambda^{\overline{a}^{n-1}}\overline{x}^{n-1}.\lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.B_2$, se tiene que $A^*_{L,k+1} = {A'_1}^{\{-a\}}\{x := A'_2\} = \lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^{n-1}}\overline{x}^{n-1}.\lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.A''_2 = \lambda^c z.B^*_{L,n+m-1} = \lambda^c z.B^*_{L,k-1}$.

   b) Cuando $m > 0$ y $n = 0$, es similar al caso anterior, con la única diferencia de que la abstracción que queda en la raíz, $\lambda^c z$, proviene de ${A_2}^*_{L,m}$.

   c) Cuando $m = 0$, se tiene que:

   $${A_1}^*_{L,k+1} = \lambda^a x.\lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^{k-1}}\overline{x}^{k-1}.A''_1$$

   Por h.i. existe un B_1 tal que $A''_1 = {B_1}^*_{L,0}$. Usando la h.i. sobre el ítem 2 se tiene además que: ${{B_1}^*_{L,0}}^{\{-a\}}\{x := {A_2}^*_{L,0}\} = {B_1}^{\{-a\}}\{x := A_2\}^*_{L,0} = \tilde{B}_1$.

Por lo tanto, tomando $B = \lambda^{\overline{a}^{k-1}}\overline{x}^{k-1}.\tilde{B}_1$ se tiene que $A^*_{L,k+1} = A_1'^{\{-a\}}\{x := A_2'\} = \lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^{k-1}}\overline{x}^{k-1}.A_1''^{\{-a\}}\{x := A_2'\} = \lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^{k-1}}\overline{x}^{k-1}.\tilde{B}_1 = \lambda^c z.B$.

Además, se ve fácilmente en cada uno de los casos que si $A^{\{*\}}_{L,k}$ es un conjunto unitario, para el B elegido, $B^{\{*\}}_{L,k}$ es también unitario.

2. Asumiendo la h.i. para ambos ítems, se prueba el ítem 2:

   - Si A es una variable, ya sea $A = x$ o $A = y \neq x$, es trivial, observando que $k = 0$.
   - Si $A = \lambda^b y.A'$, para el caso $n = 0$, se tiene que ${A'}^{*\{-a\}}_{x\cdot L,0}\{x := B^*_{L,0}\} = A'^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{x\cdot L,0}$ por h.i., de donde se deduce lo que se quiere probar, ya sea que $a = b$ o bien que $a \neq b$.
   - Si $A = \lambda^b y.A'$, para el caso $k > 0$, es similar al caso anterior, se reduce a aplicar la h.i. sobre ${A'}^*_{L,k-1}$.
   - Para el caso de una aplicación $A = @({A_1}^b, A_2)$, se prueba primero la siguiente afirmación: A es (L,k)-aplicable si y sólo si $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es (L,k)-aplicable. Para ello se consideran los dos grupos de condiciones siguientes, para valores de n, m tales que $n + m = k$:

     (I) A es (L,k)-aplicable si y sólo si:

     $$\begin{array}{l} {A_1}^*_{L,n+1} = \lambda^b y.A_1' \\ {A_2}^*_{L,m} = A_2' \\ \mathsf{fv}(@((\lambda^b y.A_1')^b, A_2')) \uparrow L \\ \text{Si } m > 0, \text{ entonces } A_1' = \lambda^{\overline{b}^n}\overline{y}^n.y \end{array}$$

     (II) Usando la h.i. y el hecho de que $a \neq b$ porque b está ligada en A, se tiene que $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es (L,k)-aplicable si y sólo si:

     $$\begin{array}{l} {A_1}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n+1} = \lambda^b y.{A_1'}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} = \lambda^b y.\tilde{A}_1 \\ {A_2}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,m} = {A_2'}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} = \tilde{A}_2 \\ \mathsf{fv}(@((\lambda^b y.\tilde{A}_1)^b, \tilde{A}_2)) \uparrow L \\ \text{Si } m > 0, \text{ entonces } \tilde{A}_1 = \lambda^{\overline{b}^n}\overline{y}^n.y \end{array}$$

     Entonces:

     ($\Rightarrow$) Sea A (L,k)-aplicable. Del primer grupo de condiciones se desprende trivialmente el segundo. Es necesario usar el hecho de que $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$ para garantizar la tercera condición.

     ($\Leftarrow$) Sea $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ (L,k)-aplicable. Del segundo grupo de condiciones se desprende el primero, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

     - Se sabe que ${A_1}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n+1}$ es de la forma $\lambda^b y.\tilde{A}_1$. Por lo tanto, ${A_1}^*_{L,n+1}$ debe ser de la forma $\lambda^b y.A_1'$. La observación importante es que la abstracción $\lambda^b y$ no puede provenir de B porque la etiqueta b está ligada en A.

- ∘ Por este mismo motivo, en el caso $m > 0$, se sabe que $\tilde{A}_1 = \lambda^{\overline{b}^n}\overline{y}^n.y$ y por lo tanto $A'_1 = \lambda^{\overline{b}^n}\overline{y}^n.y$. La observación importante en este caso es que A'_1 no puede ser de la forma $\lambda^{\overline{b}^{n'}}\overline{y}^{n'}.x$ con $n' < n$, porque y no puede figurar libre en B, ya que está ligada por la abstracción en la raíz de A'_1.

- Suponer primero que A no es (L,k)-aplicable. El caso relevante es cuando $k = 0$. En ese caso, la conclusión es directa por h.i.
- Si A sí es (L,k)-aplicable: $A^*_{L,k}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} =$
  $= A'_1{}^{\{-b\}}\{y := A'_2\}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}$ por definición
  $= A'_1{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}^{\{-b\}}\{y := A'_2{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}\}$
  por propiedades de la sustitución.
  Por hipótesis inductiva sobre el ítem 1, como $A_1{}^*_{L,n+1} = \lambda^a x.A'_1$, se sabe que A'_1 es de la forma $D^*_{L,n}$ para algún D. Por lo tanto, reemplazando también A'_2 por $A_2{}^*_{L,m}$:
  $= D^*_{L,n}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}^{\{-b\}}\{y := A_2{}^*_{L,m}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}\}$
  $= D^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n}{}^{\{-b\}}\{y := A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,m}\}$ por h.i.
  $= @((A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\})^b, A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\})^*_{L,k}$
  observando que $\tilde{A}_1 = D^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n}$.

□

Corolario 4.2.18. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $x \notin \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Si además $x \notin \mathsf{fv}(A^*_{L,k})$, entonces $A\{x := B\}^{\{*\}}_{L,k} = A^{\{*\}}_{L,k}$.

Demostración. Por el lema anterior, tomando una etiqueta a fresca, se tiene $A\{x := B\}^*_{L,k} = A^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,k} = A^*_{L,k}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} = A^*_{L,k}$. □

Corolario 4.2.19. $A^{\{*\}}_{L,k}{}^{\{-a\}} = A^{\{-a\}}{}^{\{*\}}_{L,k}$

Demostración. Como caso particular del lema anterior, tomando una variable fresca x, se tiene $A^{\{-a\}}{}^*_{L,k} = A^{\{-a\}}\{x := x\}^*_{L,k} = A^*_{L,k}{}^{\{-a\}}\{x := x\} = A^*_{L,k}{}^{\{-a\}}$. □

Lema 4.2.20. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $a \notin \mathsf{fl}(B)$, $x \notin \mathsf{fv}(B)$ y $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$. Suponer $A^{\{*\}}_{L,n}$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es $A^*_{L,n} = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$. Asumir además que para los términos X más chicos que $@(A^a, B)$ se cumple $X^*_{L,k} \succ X^*_{L,k'}$ si existen $X^*_{L,k}$ y $X^*_{L,k'}$ y además $k' \geq k$.

Entonces $A^*_{L,n}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\} = A^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n+m}$. Más precisamente, son iguales:

- El conjunto de los $A^*_{L,n}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\}$ tales que $B^*_{L,m} \in B^{\{*\}}_{L,m}$.
- El conjunto $A^{\{-a\}}\{x := B\}^{\{*\}}_{L,n+m}$.

Demostración. Por inducción en A.

- Si $A = x$, entonces $x^*_{L,0}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\} = B^*_{L,m}$

- No puede ocurrir que $A = y \neq x$.

- Si $A = \lambda^b y.A'$, para que se cumpla la hipótesis sobre la forma de $A^*_{L,n}$, n debe ser mayor que 0. Una vez observado esto, se tiene $(\lambda^b y.A')^*_{L,n} = \lambda^b y.A'^*_{L,n-1}$ y se reduce a aplicar la hipótesis inductiva.

- Si $A = @(A_1{}^b, A_2)$, para que se cumpla la hipótesis sobre la forma de $A^*_{L,n}$, el término A debe ser (L,n)-aplicable.

  Se escriben primero los dos grupos de condiciones que determinan cuándo A es (L,n) aplicable y cuándo $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es $(L, n+m)$ aplicable.

  (I) A es (L,n)-aplicable si y sólo si existen n_1 y n_2 tales que $n_1 + n_2 = n$ y además:

  $$\begin{aligned}
  &A_1{}^*_{L,n_1+1} = \lambda^b y.A'_1\\
  &A_2{}^*_{L,n_2} = A'_2\\
  &\mathsf{fv}(@((\lambda^b y.A'_1)^b, A'_2)) \uparrow L\\
  &\text{Si } n_2 > 0, \text{ entonces } A'_1 = \lambda^{\overline{b}^{n_1}} \overline{y}^{n_1}.y
  \end{aligned}$$

  (II) $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es $(L, n+m)$-aplicable si y sólo si existen p y q tales que $p + q = n + m$ y además:

  $$\begin{aligned}
  &A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,p+1} = \lambda^b y.\tilde{A}_1\\
  &A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,q} = \tilde{A}_2\\
  &\mathsf{fv}(@((\lambda^b y.\tilde{A}_1)^b, \tilde{A}_2)) \uparrow L\\
  &\text{Si } q > 0, \text{ entonces } \tilde{A}_1 = \lambda^{\overline{b}^p} \overline{y}^p.y
  \end{aligned}$$

  Se hará un análisis de casos dependiendo de la forma de A'_1 y A'_2. En cada uno de los casos, se verá que A es (L,n)-aplicable si y sólo si $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es $(L, n+m)$-aplicable.

  Observar primero que por el Lema 4.2.17 (1), se sabe que existe un D tal que $A'_1 = D^*_{L,n_1}$ y tal que $D^{\{*\}}_{L,n_1}$ es unitario.

  Además, por definición, $A^*_{L,n} = A'_1{}^{\{-b\}}\{y := A'_2\} = \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.x$. Hay dos posibles formas de que esto ocurra:

  (α) $A'_1 = \lambda^{a_1 \ldots a_{n_1}} x_1 \ldots x_{n_1}.y$ con $A'_2 = \lambda^{a_{n_1+1} \ldots a_n} x_{n_1+1} \ldots x_n.x$

  (β) $A'_1 = \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.x$

  Notar que el caso $A'_1 = \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.y$ con $A'_2 = x$ es una instancia particular de (α), tomando $n_1 = n$ y $n_2 = 0$.

(α) Sean $A'_1 = D^*_{L,n_1} = \lambda^{a_1 \dots a_{n_1}} x_1 \dots x_{n_1}.y$,
$A'_2 = A_2{}^*_{L,n_2} = \lambda^{a_{n_1+1} \dots a_n} x_{n_1+1} \dots x_n.x$.

($\Rightarrow$) Asumir primero que A es (L,n)-aplicable. Entonces, tomando $p = n_1$, $q = n_2+m$, se tiene:
$A'_1{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\} = D^{\{-a\}*}{}_{L,n_1} = \tilde{A}_1$ por el Corolario 4.2.18
$A'_2{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\} = A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n_2+m} = \tilde{A}_2$ por h.i.
Además, $\mathsf{fv}(@((\lambda^b y.\tilde{A}_1)^a, \tilde{A}_2)) \uparrow L$ pues $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$.
Para que $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ sea $(L, n+m)$-aplicable, falta verificar que si $n_2 + m > 0$, entonces $\tilde{A}_1$ tiene la forma $\lambda^{\overline{b}^n} \overline{y}^n.y$. Partiendo del valor de $\tilde{A}_1$ ya conocido, se tiene $\tilde{A}_1 = D^{\{-a\}*}{}_{L,n_1} = A'_1{}^{\{-a\}} = (\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.y)^{\{-a\}}$ que es de la forma $\lambda^{\overline{b}^n}\overline{y}^n.y$, donde, haciendo abuso de notación, $b_i = a_i\{a := \star\}$. Se usa el Corolario 4.2.19 para conmutar ${}^{\{-a\}}$ con ${}^*_{L,n}$.

($\Leftarrow$) Asumir que $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es $(L, n+m)$-aplicable. Sea $n_1 = p$. De manera análoga al caso anterior, aplicando el Corolario 4.2.18 se tiene que $\tilde{A}_1$ tiene $n_1 \leq n$ abstracciones en la raíz. Por lo tanto $q \geq m$. Entonces se puede tomar $n_2 = q - m$. Esto permite aplicar h.i. para obtener el término $\tilde{A}_2$ igual que en el caso anterior. De manera similar a lo demostrado en el Lema 4.2.17, la observación importante es que la abstracción $\lambda^b y$ debe provenir de A_1, y no puede provenir de B pues b está ligada en A.
La condición sobre la forma de $\tilde{A}_1$ se cumple pues si $n_2 > 0$ entonces $n_2 + m > 0$, y porque y no puede provenir de B, ya que está ligada en A_1.

(β) Sea $A'_1 = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$. En este caso, $n_2 = 0$, ya que A'_1 comienza con n abstracciones. No hay ninguna garantía sobre la forma de A'_2.

Para llegar a lo que se quiere demostrar, expandiendo las definiciones de los términos, surge la aparente necesidad de probar lo siguiente:

$$A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,m} = A_2{}^{\{-a\}*}{}_{L,0}\{x := B^*_{L,m}\} \tag{A.1}$$

pero esta equivalencia en general *no* es cierta. Notar por ejemplo que si $A_2 = y \neq x$ y $m > 0$, existe $y^*_{L,0}$ pero no existe $y^*_{L,m}$.

La observación importante para este caso es que, por definición, $A^*_{L,k} = A'_1{}^{\{-b\}}\{y := A'_2\}$, pero en A'_1 no hay ninguna ocurrencia de y y por lo tanto A'_2 "no se usa". Por lo tanto, no es necesario que los valores de $A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,m}$ y de $A_2{}^*_{L,0}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\}$ coincidan para que los términos finales coincidan, ya que estos dos valores no figuran en los términos finales.

($\Rightarrow$) Asumir primero que A es (L,n)-aplicable. Se tiene que $A_1{}^*_{L,n+1} = \lambda^b y.A'_1 = \lambda^b y.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$. Por lo tanto, tomando $p = n + m$, $q = 0$, se obtiene por h.i.:

$$A_1{}^*_{L,n+1}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\} = A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,n+m+1} = \lambda^b y.\tilde{A}_1$$

Además, por el Lema 4.2.17 (2):

$$\tilde{A_2} = A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,0} = A_2{}^{*}_{L,0}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}$$

El término $\tilde{A_2}$ existe por el Corolario 4.2.13. Además, dado que $\mathsf{fv}(A_2{}^*_{L,0}) \uparrow L$ y que $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$, es claro que $\tilde{A_2} \uparrow L$. Se recurre al Corolario 4.2.15 para afirmar que $\mathsf{fv}(B) \supseteq \mathsf{fv}(B^*_{L,0})$. Por último, $q = 0$, y por lo tanto no se imponen condiciones sobre la forma de $\tilde{A_1}$.
Dado que $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es (L, k)-aplicable:

$$A^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,k} = \tilde{A_1}{}^{\{-b\}}\{y := \tilde{A_2}\}$$

Razonando de manera análoga a la del caso (α), por el Lema 4.2.17 (1), existe un D tal que $A'_1 = D^*_{L,n}$ y por lo tanto $\tilde{A_1} = D\{x := B\}^*_{L,n+m}$. Se sabe que $y \notin \mathsf{fv}(A'_1)$ y que $y \notin \mathsf{fv}(B)$, y por lo tanto $y \notin \mathsf{fv}(\tilde{A_1})$. Entonces:
$\tilde{A_1}{}^{\{-b\}}\{y := \tilde{A_2}\} =$
$= \tilde{A_1}{}^{\{-b\}}$ pues $y \notin \mathsf{fv}(\tilde{A_1})$
$= D\{x := B\}^*_{L,n+m}{}^{\{-b\}}$ pues $y \notin \mathsf{fv}(\tilde{A_1})$
$= A'_1\{x := B^*_{L,m}\}^{\{-b\}}$ por h.i., usando que $A'_1 = D^*_{L,n}$
$= A'_1\{x := B^*_{L,m}\}^{\{-b\}}\{y := A'_2\{x := B^*_{L,m}\}\}$
pues $y \notin \mathsf{fv}(A'_1)$ y además $y \notin \mathsf{fv}(B)$
$= A'_1\{y := A'_2\}^{\{-b\}}\{x := B^*_{L,m}\}$
por propiedades de la sustitución, y observando que $b \notin B$ por ser una etiqueta ligada en A.

($\Leftarrow$) Asumir que $A^{\{-a\}}\{x := B\}$ es $(L, n+m)$-aplicable. El razonamiento general es similar al del caso anterior, una vez que se establecen las condiciones para aplicar la hipótesis inductiva. La observación importante es que si la aplicación:

$$@((A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\})^b, A_2{}^{\{-a\}}\{x := B\})$$

es $(L, n+m)$ aplicable, entonces $p = n+m$ y $q = 0$. No podría ocurrir que $q > 0$, porque esto requeriría que $A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,p+1}$ tuviera la forma $\lambda b.y\lambda^{\overline{b}^p}\overline{y}^p.y$, pero esto no puede ocurrir. Para garantizar que no ocurre, se observa primero, por el Lema 4.2.17 (2) que $A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,p+1} = A_1{}^*_{L,p+1}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\}$. Usando la hipótesis del lema que afirma que $X^*_{L,k} \succ X^*_{L,k'}$ si $k' \geq k$, se puede concluir lo siguiente:

- Si $p \geq n$, entonces $A_1{}^*_{L,n+1} \succ A_1{}^*_{L,p+1}$ y por lo tanto $A_1{}^{\{-a\}}\{x := B\}^*_{L,p+1}$ debe ser de la forma $\lambda^b y.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.B^*_{L,p-n}$, que no puede ser de la forma especificada, porque no contiene ocurrencias ligadas de y.
- Si $p \leq n$, y utilizando la Observación 4.2.10, se tiene que $A_1{}^*_{L,p+1}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,0}\} \succ A_1{}^*_{L,n+1}{}^{\{-a\}}\{x := B^*_{L,m}\}$. Asumiendo que el término de la izquierda fuera de la forma $\lambda^{\overline{b}^p}\overline{y}^p.y$ se llegaría a una contradicción, porque en el término de la derecha no puede ocurrir una y ligada.

Hecha esta observación, la demostración requiere los mismos hechos que el caso anterior, haciendo observaciones análogas a la del caso (α).

□

Lema 4.2.21. Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$. Sean $L' \subseteq L$ y $k' \geq k$. Si existe $A^*_{L',k'} \in A^{\{*\}}_{L',k'}$, entonces existe un único valor $B^*_{L'k'} \in B^{\{*\}}_{L',k'}$. Además $A^*_{L',k'} = B^*_{L',k'}$.

Demostración. Por inducción en la derivación del juicio $A \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B$.

Caso LVar:
$A = x$, $k = 0$ y $B = x$. Además, $k' = 0$ y trivialmente $A^*_{L',0} = B^*_{L',0}$.

Caso LAbs1:
$A = \lambda^a x.A' \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B = \lambda^a x.B'$, con $k = 0$. Se consideran dos casos:

- $k' = 0$. Entonces $A'^*_{x \cdot L',0} = B'^*_{x \cdot L',0}$ por h.i. ya que $x \cdot L' \subseteq x \cdot L$. Entonces: $(\lambda^a x.A')^*_{L',0} = \lambda^a x.A'^*_{x \cdot L',0} = \lambda^a x.B'^*_{x \cdot L',0} = (\lambda^a x.B')^*_{L',0}$.
- $k' > 0$. Entonces $A'^*_{L',k'-1} = B'^*_{L',k'-1}$ por h.i. pues $k' - 1 \geq 0$ y $L' \subseteq x \cdot L$. Por lo tanto: $(\lambda^a x.A')^*_{L',k'} = \lambda^a x.A'^*_{L',k'-1} = \lambda^a x.B'^*_{L',k'-1} = (\lambda^a x.B')^*_{L',k'}$.

Caso LAbs2:
$A = \lambda^a x.A' \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} B = \lambda^a x.B'$ con $k' \geq k > 0$. Por h.i. se tiene que $A'^*_{L',k'-1} = B'^*_{L',k'-1}$. Entonces:
$(\lambda^a x.A')^*_{L',k'} = \lambda^a x.A'^*_{L',k'-1} = \lambda^a x.B'^*_{L',k'-1} = (\lambda^a x.B')^*_{L',k'}$.

Caso LApp1:
$A = @({A_1}^a, A_2) \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} @({B_1}^a, B_2) = B$ y $k = 0$. Por h.i., se tiene que para todo n, si existe ${A_1}^*_{L',n}$ entonces existe un único ${B_1}^*_{L',n} = {A_1}^*_{L',n}$. Análogamente, para todo m, si existe ${A_2}^*_{L',m}$ entonces existe un único ${B_2}^*_{L',m} = {A_2}^*_{L',m}$.

Por lo tanto, $A = @({A_1}^a, A_2)$ es (L', k')-aplicable si y sólo si $B = @({B_1}^a, B_2)$ es (L', k')-aplicable. Entonces:

- Si A y B son ambos (L', k')-aplicables, entonces, tomando los mismos valores de n' y m', resulta que $A^*_{L',k'} = B^*_{L',k'}$. Falta demostrar que, en este caso, $B^*_{L',k'}$ es único. Para ver esto, se demostrará más abajo, en la Afirmación (†), que cuando una aplicación es (L', k')-aplicable hay una sola posible elección válida de n' y m'.
- Si A y B no son (L', k')-aplicables y $k' > 0$, entonces $A^*_{L',k'}$ no existe y la propiedad se satisface trivialmente (queda fuera de las hipótesis del lema).
- Si A y B no son (L', k')-aplicables y $k' = 0$, entonces $@({{A_1}^*_{L',0}}^a, {A_2}^*_{L',0}) = @({{B_1}^*_{L',0}}^a, {B_2}^*_{L',0})$.

Caso LApp2:
$A = @(A_1{}^a, A_2) \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell A_1'^{\{-a\}}\{x := A_2'\} = B$. Se tienen como hipótesis de la regla:

$$
\begin{aligned}
& n + m = k \\
& A_1 \overset{L,n+1}{\Rightarrow}_\ell \lambda^a x.A_1' \\
& A_2 \overset{L,m}{\Rightarrow}_\ell A_2' \\
& \mathsf{fv}(@(\lambda^a x.A_1'{}^a, A_2')) \uparrow L \\
& \text{Si } m > 0, \text{ entonces } A_1' = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

La hipótesis del lema afirma que existe $A^*_{L',k'}$. Se demostrará primero que $A = @(A_1{}^a, A_2)$ es (L', k')-aplicable.

Por hipótesis inductiva se tiene que para todo $L' \subseteq \mathcal{V}$ y $n', m' \in \mathbb{N}$ tales que $L' \subseteq L$, $n' \geq n$ y $m' \geq m$, se satisface que si existe el término de la izquierda, entonces existe el término de la derecha (y además es único) en las siguientes igualdades:

- $A_1{}^*_{L',n'+1} = (\lambda^a x.A_1')^*_{L',n'+1}$
- $A_2{}^*_{L',m'} = A_2'{}^*_{L',m'}$

Afirmación: $@(A_1{}^a, A_2)$ es (L', k')-aplicable. Se demuestra por análisis del valor de $k' \geq k$:

- Si $k' > k$ entonces $k' > 0$. No puede ocurrir que $A^*_{L',k'}$ exista por el segundo caso que define el resultado de los superdevelopments completos de una aplicación en la Definición 4.2.6, porque este caso requiere $k' = 0$. Entonces, dado que se asume que $A^*_{L',k'}$ existe, debe ser porque se cumple la condición ($\star$), es decir que A es (L', k')-aplicable.
- Si $k' = k$, tomando $n' = n$ y $m' = m$, ocurre que los términos $A_1{}^*_{L',n+1} = (\lambda^a x.A_1')^*_{L',n+1}$ y $A_2{}^*_{L',m} = A_2'{}^*_{L',m}$ cumplen con los requisitos de la condición ($\star$) de la Definición 4.2.6. A continuación se muestra por qué.

  Partiendo de (A.2), usando el Lema 4.2.4 se tiene que $A_1 \overset{L',n+1}{\Rightarrow}_\ell \lambda^a x.A_1'$ y que $A_2 \overset{L',m}{\Rightarrow}_\ell A_2'$. Usando el Lema 4.2.12 se tiene entonces que:

$$
\begin{aligned}
& \lambda^a x.A_1' \succ A_1{}^*_{L',n+1} \\
& A_2' \succ A_2{}^*_{L',m}
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

  Por la Observación 4.2.10 (3) se concluye que se verifican las condiciones sobre las variables libres, pues $\mathsf{fv}(@(A_1{}^*_{L',n+1}{}^a, A_2{}^*_{L',m})) \subseteq \mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A_1')^a, A_2'))$.

  Por las propiedades de $\succ$ también es claro que $A_1{}^*_{L',n+1} = \lambda^a x.A_1'$ cuando $m > 0$.

Se sabe entonces que A es (L', k')-aplicable. Por definición, esto significa que existen $n', m' \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\begin{aligned}
&n' + m' = k' \\
&\text{Existe } A_1{}^*_{L',n'+1} = \lambda^a x.D_1. \\
&\text{Existe } A_2{}^*_{L',m'}. \\
&\mathsf{fv}(@(A_1{}^*_{L',n'+1}{}^a, A_2{}^*_{L',m'})) \uparrow L. \\
&\text{Si } m' > 0 \text{ entonces } D_1 = \lambda \overline{a}^{n'} \overline{x}^{n'}.x.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Lo que se quiere demostrar es que el término B existe y que es único. Para llegar a esa conclusión, sería necesario asegurarse de que $n' \geq n$ y $m' \geq m$, para poder aplicar la hipótesis inductiva. Además, para garantizar la unicidad de B se verá que hay un único valor posible para n' y m'. Antes de pasar a la demostración que garantiza que n' y m' pueden tomar un único valor, se enuncian y se demuestran algunas propiedades auxiliares que dependen de la hipótesis inductiva.

Afirmación ($\diamond$)**:** las siguientes propiedades se cumplen aplicando la hipótesis inductiva sobre términos $X \in \Lambda_\ell$ más chicos que A, es decir, asumiendo:

$$\text{Si } X \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} Y \text{ y existe } X^*_{L',k'}, \text{ entonces } Y^*_{L',k'} \text{ es único y } X^*_{L',k'} = Y^*_{L',k'}. \tag{A.5}$$

para $L' \subseteq L$ y $k' \geq k$. Todavía no se enuncian como propiedades separadas porque dependen de manera mutuamente recursiva del presente lema. Asumiendo (A.5) se demuestran las siguientes propiedades:

1. Si $X \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} Y$ entonces $Y \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} X^*_{L,k}$.

   Demostración. Por el Lema 4.2.14, $Y \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} Y^*_{L,k}$. Por la hipótesis (A.5), $Y^*_{L,k} = X^*_{L,k}$. □

2. $X^*_{L,k} \overset{L',k'}{\Rightarrow_\ell} X^*_{L',k'}$

   Demostración. Por el Lema 4.2.14 se tiene $X \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} Y = X^*_{L,k}$. Por el ítem anterior, $X^*_{L,k} \overset{L',k'}{\Rightarrow_\ell} X^*_{L',k'}$, □

3. $X^*_{L,k} \succ X^*_{L',k'}$

   Demostración. Se concluye usando el ítem anterior, por el Lema 4.2.11. □

Una vez hecho esto, se muestra por qué n' y m' son tales que se puede aplicar la hipótesis inductiva, y además que son únicos, lo cual es necesario para garantizar la unicidad de B:

Afirmación (†)**:** si $@(A_1{}^a, A_2)$ es (L', k') aplicable y existe $@(A_1{}^a, A_2)^*_{L',k'}$ partiendo de términos $A_1{}^*_{L',n'+1}$ y $A_2{}^*_{L',m'}$, entonces hay un único valor posible para n' y m'. Además $n' \geq n$, $m' \geq m$.

- Sea $N = \text{máx}(n, n')$. Se sabe que tanto $A1^*_{L',n}$ como $A1^*_{L',n'}$ existen. Por lo tanto $A1^*_{L',N}$ existe.

  Además, por la Afirmación ($\diamond$) (3), $A1^*_{L',n+1} > A1^*_{L',N+1}$ y $A1^*_{L',n'+1} > A1^*_{L',N+1}$.

- Si $m > 0$, entonces $A1^*_{L',n+1}$ debe ser de la forma $\lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$. Por lo tanto, $A1^*_{L',N+1}$ tiene la misma forma (es el mismo término). Entonces $A1^*_{L',n'+1}$ no puede tener más de $n+1$ abstracciones en la raíz, de modo que $n' \leq n$.

  Dado que $n' \leq n$, se concluye que $m' \geq m > 0$, porque $k' = n' + m' \geq n + m = k$. Como $m' > 0$, el término $A1^*_{L',n'+1}$ debe ser de la forma $\lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n'}}\overline{x}^{n'}.x$. Si n' fuera menor que n, se concluiría por Afirmación ($\diamond$) (3) que $A1^*_{L,n+1} > A1^*_{L',n'+1}$, lo cual sería una contradicción.

  Por lo tanto, $n' = n$ y $m' = k' - n$.

- Los casos en los que A es (L', k') aplicable para valores de $m' = 0$ y $m' > 0$ son mutuamente excluyentes. Sean $m_1 > 0$ y $m_2 = 0$, con $n_1 + m_1 = k'$ y $n_2 = k'$. Notar que $n_1 < n_2$ y suponer que existen $A1^*_{L',n_1}$ y $A1^*_{L',n_2}$. Por definición del resultado de los superdevelopments completos, dado que $m_1 > 0$, $A1^*_{L',n_1+1}$ debe tener la forma $\lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n_1}}\overline{x}^{n_1}.x$. Por la Afirmación ($\diamond$) (3), $\lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n_1}}\overline{x}^{n_1}.x > \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n_2}}\overline{x}^{n_2}.D$. De esto se deduce $n_1 \geq n_2$, llegando a una contradicción.

- Si $m = 0$ y $m' = 0$, es trivial observar que $n' \geq n$ y que hay una sola forma de elegir los valores n', m'.

- Si $m = 0$ y $m' > 0$, se puede razonar de manera análoga a la ya expuesta para el caso $m > 0$. El término $A1^*_{L',n'+1}$ debe tener la forma $\lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n'}}\overline{x}^{n'}.x$. Por lo tanto, el término $A1^*_{L',N}$ también. Entonces $n' \geq n$. Ya se sabía además que $m' > m$.

  Además, hay una sola forma de tomar n'. Suponer que pudieran elegirse dos valores distintos, $n_1 < n_2$. Entonces, por la Afirmación ($\diamond$) (3), $A1^*_{L',n_1+1} = \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n_1}}\overline{x}^{n_1}.x > \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^{n_2}}\overline{x}^{n_2}.x = A1^*_{L',n_2+1}$ lo cual sería una contradicción.

Volviendo entonces a las condiciones (A.4), se sabe ahora que los valores de n' y m' son únicos, y además que $n' \geq n$, $m' \geq m$. Por lo tanto, aplicando h.i.:

$$
\begin{aligned}
&A1^*_{L',n'+1} = \lambda^a x.D_1 = (\lambda^a x.A'_1)^*_{L',n'+1}.\\
&A2^*_{L',m'} = A'^*_{2L',m'} \qquad\qquad (A.6)\\
&\text{Si } m' > 0 \text{ entonces } D_1 = \lambda^{\overline{a}^{n'}}\overline{x}^{n'}.x.
\end{aligned}
$$

Considerando que $B = A_1'^{\{-a\}}\{x := A_2'\}$, sólo falta verificar la siguiente condición:

$$
A_1'^{\{-a\}}\{x := A_2'\}^*_{L',k'} = A'^{*}_{1L',n'}{}^{\{-a\}}\{x := A'^*_{2L',m'}\}
$$

esto es consecuencia directa del Lema 4.2.17 (2) y del Lema 4.2.20.

□

Corolario 4.2.22. Dado $A \in \Lambda_\ell$, si $A^*_{L,k}$ existe, entonces es único. Además, $A^*_{L,k}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, entonces $B \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell A^*_{L,k}$.
2. Si $L' \subseteq L$ y $k' \geq k$, entonces $A^*_{L,k} \overset{L',k'}{\Rightarrow}_\ell A^*_{L',k'}$.
3. $A\{x := B\}^*_{L,k} = A^*_{L,k}\{x := B^*_{L,0}\}$.
4. Si $A^*_{L,n} = \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$, entonces $A\{x := B\}^*_{L,n+m} = A^*_{L,n}\{x := B^*_{L,m}\}$.

Demostración. La unicidad de $A^*_{L,k}$ se desprende del Lema 4.2.21. Dado que existe $A^*_{L,k}$ se tiene $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell A^*_{L,k}$ por Lema 4.2.14. Entonces existe un único valor de $A^*_{L,k}{}^*_{L,k}$ y además $A^*_{L,k} = A^*_{L,k}{}^*_{L,k}$, con lo cual $A^*_{L,k}$ es único.

Los ítems 1. y 2. se demuestran igual que en la afirmación ($\diamond$) del Lema 4.2.21. Los ítems 3. y 4. se desprenden del Lema 4.2.17 y el Lema 4.2.20. □

A.5.2. Superdevelopments débiles simultáneos

Lema 4.3.5. Relación entre $\overset{L,k}{\Rightarrow}$ y $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$:

1. Si $A \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell B$, entonces $|A| \overset{L,k}{\Rightarrow} |B|$.
2. Si $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$, entonces existen $M_\ell, N_\ell \in \Lambda_\ell$, con M_ℓ (L,k)-etiquetado y M_ℓ linealmente etiquetado, tales que $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell N_\ell$.

Demostración. La única diferencia entre las definiciones de $\overset{L,k}{\Rightarrow}$ y $\overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell$ es que en la regla LApp2 se exige que la etiqueta de la abstracción que contribuye al redex sea la misma que la de la correspondiente aplicación. Por lo tanto, el primer ítem es trivial por inducción en la derivación del juicio. El segundo ítem se prueba también por inducción en la derivación del juicio $M \overset{L,k}{\Rightarrow} N$. Se verá primero que puede construirse un juicio $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell N_\ell$ con M_ℓ (L,k)-etiquetado:

- Caso Var: es trivial.
- Caso Abs1: se tiene $M'_\ell \overset{x\cdot L,0}{\Rightarrow}_\ell N'_\ell$ por h.i. El término $M'_\ell{}^*_{x\cdot L,0}$ no tiene etiquetas libres distintas de $\star$. Tomando $M_\ell = \lambda^\star x.M'_\ell$ y $N_\ell = \lambda^\star x.N'_\ell$, se tiene que $M_\ell{}^*_{L,0} = \lambda^\star x.M'_\ell{}^*_{L,0}$ tampoco tiene etiquetas libres y por lo tanto es $(L,0)$-etiquetado. Además es claro que $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow}_\ell N_\ell$ por la regla LAbs1.

- Caso Abs2: se tiene que $M'_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} N'_\ell$ por h.i. El término $M'\ell^*_{L,k}$ es de la forma $\lambda^{a_1 \ldots a_k} x_1 \ldots x_k.P$, donde las etiquetas $a_1, \ldots, a_k$ son distintas de $\star$ y distintas entre sí, y P no tiene etiquetas libres distintas de $\star$. Tomando $M_\ell = \lambda^a x.M'_\ell$ y $N_\ell = \lambda^a x.N'_\ell$, eligiendo una etiqueta $a \neq \star$, $a \notin \mathsf{fl}(M'_\ell)$ es claro que M_ℓ es (L, k)-etiquetado y además $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} N_\ell$ por la regla LAbs2. Notar que $a \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$.

- Caso App1: se tiene $M_{i\ell} \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} N_{i\ell}$ por h.i., para $i \in \{1, 2\}$, donde $M_{i\ell}{}^*_{L,0}$ no tiene etiquetas libres distintas de $\star$. Tomando $M_\ell = @(M_{1\ell}{}^\star, M_{2\ell})$, y $N_\ell = @(N_{1\ell}{}^\star, N_{2\ell})$, se tiene que $M_\ell{}^*_{L,0} = @(M_{1\ell}{}^*_{L,0}{}^\star, M_{2\ell}{}^*_{L,0})$.

  Para evitar que haya etiquetas en común entre los subtérminos, asumir que $M_{1\ell}$ y $M_{2\ell}$ están disjuntamente etiquetados, es decir que sus etiquetas libres en común son a lo sumo $\star$, o sea $\mathsf{fl}(M_{1\ell}) \cap \mathsf{fl}(M_{2\ell}) \subseteq \{\star\}$. Esto puede obtenerse simplemente renombrando las etiquetas libres de $M_{2\ell}$ distintas de $\star$. (Una manera más constructiva o implementativa de imponer esta condición sería modificar el enunciado del lema para que los términos devueltos estén decorados con etiquetas tomadas de un subconjunto arbitrario $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, y construyendo $M_{2\ell}$ tomando las etiquetas de $\mathcal{L}' \setminus \mathsf{fl}(M_{1\ell})$).

  Observar que la etiqueta de la aplicación es $\star$, y por lo tanto M_ℓ no puede ser $(L, 0)$-aplicable. Dado que M_ℓ no tiene etiquetas libres distintas de $\star$, se tiene que M_ℓ es $(L, 0)$-etiquetado, y además es claro que $M_\ell \overset{L,k}{\Rightarrow_\ell} N_\ell$ por la regla LApp1.

- Caso App2: se tiene que $M_{1\ell} \overset{L,n+1}{\Rightarrow_\ell} N_{1\ell} = \lambda^a x.N'_{1\ell}$ donde $N_{1\ell}{}^*_{L,n+1} = \lambda^a x.N'_1{}\ell^*_{L,n}$ tiene exactamente $n + 1$ etiquetas libres distintas de $\star$ en las abstracciones de la raíz pues $M_{1\ell}$ está $(L, n+1)$-etiquetado. Además, $M_{2\ell} \overset{L,m}{\Rightarrow_\ell} N_{2\ell}$ con $M_{2\ell}$ (L, m)-etiquetado. Nuevamente, asumir que $M_{1\ell}$ y $M_{2\ell}$ están disjuntamente etiquetados.

  Por el Lema 4.2.21, $M_{1\ell}{}^*_{L,n+1} = N_{1\ell}{}^*_{L,n+1}$ y también $M_{2\ell}{}^*_{L,m} = N_{2\ell}{}^*_{L,m}$. Por lo tanto, tomando $M_\ell = @(M_{1\ell}{}^a, M_{2\ell})$ y $N_\ell = @(N_{1\ell}{}^a, N_{2\ell})$ se tiene que tanto M_ℓ como N_ℓ son $(L, n + m)$-aplicables.

  La condición sobre las variables libres se verifica porque se aplica la regla App2 y por el Corolario 4.2.15 se tiene que $\mathsf{fv}(N_{1\ell}) \supseteq \mathsf{fv}(N_{1\ell}{}^*_{L,n+1})$ y análogamente $\mathsf{fv}(N_{2\ell}) \supseteq \mathsf{fv}(N_{2\ell}{}^*_{L,m})$. La condición sobre la forma de $N_{1\ell}{}^*_{L,n+1}$ en el caso $m > 0$ se cumple también, usando el Lema 4.2.11 y el Lema 4.2.14 para concluir que $N_{1\ell} \succ N_{1\ell}{}^*_{L,n+1}$.

  Considerando esto, sólo queda ver que el término $M_\ell{}^*_{L,n+m} = N_\ell{}^*_{L,n+m} = N'_1{}\ell^*_{L,n}{}^{\{-a\}}\{x := N_{2\ell}{}^*_{L,m}\}$ esté $(L, n + m)$-etiquetado. En cualquiera de los casos posibles (ya sea que $m = 0$ o $m > 0$) se concluye fácilmente que el término en cuestión tiene $n + m$ abstracciones en la raíz cuyas etiquetas son distintas de $\star$ y distintas entre sí, y que además no tiene más de $n + m$ etiquetas libres distintas de $\star$ en sus abstracciones. Se puede demostrar formalmente por inducción en el término $N'_1{}\ell^*_{L,n}$. A continuación se justifican los detalles interesantes de la demostración:

- Cuando $m = 0$, que se produzcan copias de $N_{2\ell}{}^{*}_{L,0}$ no es un problema, porque el término está $(L, 0)$-etiquetado y por lo tanto no tiene etiquetas libres distintas de $\star$.
- Cuando $m > 0$, se sabe que no se producen copias de $N_{2\ell}{}^{*}_{L,0}$ por la condición impuesta sobre la forma de $N'_{1}{}^{*}_{\ell L,n}$. Para garantizar que las $n + m$ etiquetas son todas distintas, es necesario recurrir al hecho ya mencionado de que $M_{1\ell}$ y $M_{2\ell}$ están disjuntamente etiquetados.
- Además, en el término final no pueden quedar ocurrencias libres de a porque se aplica el operador $^{\{-a\}}$ para eliminarlas.

Por último, es claro que con la construcción propuesta el término M_ℓ es linealmente etiquetado. Para las reglas Abs1 y Abs2, la propiedad se cumple por hipótesis inductiva, y porque la etiqueta que se agrega no figuraba previamente en el término. Para las reglas App1 y App2, los subtérminos cumplen la propiedad por hipótesis inductiva. Además, no hay etiquetas en común porque $M_{1\ell}$ y $M_{2\ell}$ se eligen disjuntamente etiquetados. Finalmente, en el caso de App2, la etiqueta a liga a lo sumo una abstracción porque $M_{1\ell}$ no puede contener etiquetas libres repetidas.

□

Lema 4.3.6 (De términos linealmente etiquetados a términos inicialmente etiquetados)**.** Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $A \twoheadrightarrow_\ell B$, con A linealmente etiquetado. Entonces existen $A', B' \in \Lambda_\ell$ tales que $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, $A' \twoheadrightarrow_\ell B'$ y A' inicialmente etiquetado.

Demostración. Informalmente, si se tiene una reducción que comienza por un término linealmente etiquetado, las abstracciones decoradas con $\star$ se pueden cambiar por etiquetas libres no utilizadas. Las abstracciones restantes mantienen su etiqueta original. Las etiquetas introducidas se propagan a lo largo de la reducción, pero no impiden que se contraigan los redexes que se contraían en la reducción original.

Más formalmente: sea $P \subseteq \mathsf{pos}(A)$ el subconjunto de posiciones de A en las que hay una abstracción. Considerar las siguientes funciones de P en $\mathcal{L}$:

$$label(p) = a \text{ si } A|_p \text{ es de la forma } \lambda^a x.A_1$$

que devuelve la etiqueta que decora la abstracción en la posición p de A, y

$$fresh(p) = \ b \in \mathcal{L} \text{ tal que } b \text{ no ocurre en } A$$

con $fresh(p)$ inyectiva (i.e. devuelve una etiqueta aún no utilizada). Sea además:

$$l(p) = \begin{cases} fresh(p) & \text{si } label(p) = \star \\ label(p) & \text{si } label(p) \neq \star \end{cases}$$

Se construye el término A' de tal manera que $|A| = |A'|$. Las aplicaciones en A' tienen las mismas etiquetas que en A. Además, para cada $p \in P$, la abstracción en $A'|_p$ está etiquetada con $l(p)$.

Definiendo la relación de descendiente de manera similar a la Definición 2.2.1 y a la Definición 2.3.3 y extendiendo la noción a varios pasos de la manera estándar, se puede ver por inducción en la longitud de la derivación que si $A \twoheadrightarrow_\ell B$, entonces $A' \twoheadrightarrow_\ell B'$ para algún B' tal que $|B| = |B'|$, de tal manera que:

- Las aplicaciones en B y B' están decoradas con las mismas etiquetas.
- Para toda posición $q \in \mathsf{pos}(B)$, sea $p \in \mathsf{pos}(A)$ la única posición de la cual q es descendiente. Si $B|_q$ una abstracción, entonces:
  - Si $label(p) = \star$, entonces la etiqueta de $B'|_q$ es $fresh(p)$.
  - Si $label(p) \neq \star$, entonces la etiqueta de $B'|_q$ coincide con la de $B|_q$.

El caso base es directo por construcción de A'. En el paso inductivo, suponer que $A \to_\ell^k A_1 \to_\ell B$. Por h.i., $A' \twoheadrightarrow_\ell A'_1$. Los términos A_1 y A'_1 son iguales salvo por las etiquetas de sus abstracciones. Sea q la posicón del redex que se contrae en el paso $A_1 \to_\ell B$. El redex es de la forma $A_1|_q = @((\lambda^a x.D_1)^a, D_2)$. Para poder contraer el redex en A'_1, debe ocurrir que la abstracción en la posición $q00$ esté etiquetada con a. Sea p la única posición de la cual $q00$ es descendiente. Por h.i., se sabe que $label(p) = a \neq \star$, con lo cual la etiqueta coincide con la de $A_1|_q$. Por lo tanto, el subtérmino en la posición q de A'_1 es efectivamente un redex. El término B' que se obtiene al contraerlo es obviamente igual a B salvo por las etiquetas de sus abstracciones. Las restantes condiciones se mantienen por la definición inductiva de descendiente. □

Lema 4.3.7 (De términos inicialmente etiquetados a términos linealmente etiquetados)**.** Sean $A, B \in \Lambda_\ell$ tales que $A \twoheadrightarrow_\ell B$ con A inicialmente etiquetado y B en $\to_\ell$-forma normal. Entonces existen $A', B' \in \Lambda_\ell$ tales que $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$, $A' \twoheadrightarrow_\ell B'$, A' linealmente etiquetado y B' en $\to_\ell$-forma normal.

Demostración. Informalmente, si se "borran" las etiquetas libres de A, transformándolas en $\star$, se obtiene un término linealmente etiquetado sin afectar los pasos de reducción más que en las etiquetas de sus abstracciones.

Sea d la función que borra las etiquetas libres. Dado un término A, con $|A| = |d(A)|$, si en $A|_p$ hay una abstracción decorada con una etiqueta libre, en $d(A)|_p$ la abstracción está decorada con $\star$. (d no modifica las etiquetas ligadas).

Por inducción en la longitud de la derivación, si $A \twoheadrightarrow_\ell B$, entonces $d(A) \twoheadrightarrow_\ell d(B)$. El caso base es trivial. En el paso inductivo, se tiene que $A \to_\ell^k A_1 \to_\ell B$ y, por h.i., $d(A) \twoheadrightarrow_\ell d(A_1)$. Sólo hay que verificar que el redex Δ que se contrae en el paso $A_1 \to_\ell B$ siga siendo un redex en $d(A_1)$. Esto es cierto porque la estructura de los términos es la misma (i.e. $|A_1| = |d(A_1)|$), y porque además en el redex Δ sólo interviene una etiqueta ligada.

Finalmente, notar que es trivial que si B está en $\to_\ell$-forma normal, entonces $d(B)$ está en $\to_\ell$-forma normal. □

A.6. De reducción simultánea a reducción etiquetada

Lema 4.4.3. Si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces $\mathsf{fv}(A) \cap L = \mathsf{fv}(B) \cap L$.

Demostración. Por inducción en k. El caso base, $k = 0$ es directo recurriendo al Lema 3.5.2.

Si $k > 0$:

- $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} \lambda^{a}x.A_1$
- $A_1 \overset{L,k-1}{\rightsquigarrow} A_2$
- $B = \lambda^{a}x.A_2$

Por convención de variables, $x \notin L$. Por h.i. se tiene que $\mathsf{fv}(A_1) \cap L = \mathsf{fv}(A_2) \cap L$. Además, $\mathsf{fv}(A) \cap L = \mathsf{fv}(A_1) \cap L$ es también consecuencia del Lema 3.5.2. □

Lema 4.4.4. Si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.B$ y a es una etiqueta distinta de $a_1 \ldots a_n$, entonces $A^{\{-a\}} \overset{L,k}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.B^{\{-a\}}$.

Demostración. Por inducción en k.

- Caso $k = 0$: $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} B$, entonces $A^{\{-a\}} \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} B^{\{-a\}}$ por Lema 3.5.5.
- Caso $k+1$: $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} \lambda^{b}y.A'$ y $A' \overset{L,k}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.B$. Se concluye lo deseado aplicando el Lema 3.5.5, y usando el hecho de que $a \neq b$ por hipótesis.

□

Lema 4.4.5. Si $A \overset{L}{\rightarrow}_{\ell} A'$ y $A' \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$

Demostración. Obvia por definición. □

Lema 4.4.6 (Abstracción I)**.** Si $A \overset{x\cdot L,0}{\rightsquigarrow} B$, entonces $\lambda^{a}x.A \overset{L,0}{\rightsquigarrow} \lambda^{a}x.B$.

Demostración. $A \overset{x\cdot L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} B$ por definición. Por Lema 3.5.4 (2), esto es equivalente a $\lambda^{a}x.A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} \lambda^{a}x.B$. □

Lema 4.4.7 (Abstracción II)**.** Si $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$, entonces $\lambda^{a}x.A \overset{L,k+1}{\rightsquigarrow} \lambda^{a}x.B$.

Demostración. Por definición de reducción en cadena (Definición 4.4.2):

- $\lambda^{a}x.A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} \lambda^{a}x.A$ en 0 pasos
- $A \overset{L,k}{\rightsquigarrow} B$

Por lo tanto, $\lambda^{a}x.A \overset{L,k+1}{\rightsquigarrow} \lambda^{a}x.B$. □

Lema 4.4.8 (Aplicación I)**.** Si $A \overset{L,0}{\rightsquigarrow} A'$ y $B \overset{L,0}{\rightsquigarrow} B'$, entonces $@(A^{a}, B) \overset{L,0}{\rightsquigarrow} @(A'^{a}, B')$.

Demostración. Directo por definición, teniendo en cuenta que $\overset{L,0}{\rightsquigarrow} = \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell}$:

$$@(A^{a}, B) \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} @(A'^{a}, B) \overset{L}{\twoheadrightarrow}_{\ell} @(A'^{a}, B')$$

□

Lema 4.4.9 (Aplicación II)**.** Sean $A \overset{L,n+1}{\rightsquigarrow} \lambda^a x.A' = \lambda^{a\,\overline{a}^n} x\,\overline{x}^n.A''$ y $B \overset{L,m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{b}^m} \overline{y}^m.B'$, asumiendo además que $\mathsf{fv}(\lambda^a x.A') \uparrow L$, que $\mathsf{fv}(B') \uparrow L$ y que no hay etiquetas repetidas en $a, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Entonces:

1. Si $m > 0$ y $A'' = x$, entonces $@(A^a, B) \overset{L,n+m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.\lambda^{\overline{b}^m} \overline{y}^m.B'$
2. Si $m = 0$, entonces $@(A^a, B) \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.A''^{\{-a\}}\{x := B'\}$.

Demostración. En ambos casos, se tiene $A \overset{L,n+1}{\rightsquigarrow} \lambda^a x.A'$. Entonces $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell \lambda^a x.A_1$, con $A_1 \overset{L,n}{\rightsquigarrow} A'$ por definición de reducción en cadena. Por lo tanto:

$$@(A^a, B) \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell @((\lambda^a x.A_1)^a, B) \tag{A.7}$$

Se verá que la aplicación y la abstracción que quedan en la raíz en (A.7) son un redex. Para esto, la única condición que falta garantizar es: $\mathsf{fv}(@((\lambda^a x.A_1)^a, B)) \uparrow L$. En ambos casos, por hipótesis:

- $\mathsf{fv}(\lambda^a x.A') \uparrow L$
- $\mathsf{fv}(B') \uparrow L$

Usando el Lema 4.4.3 y el Lema 3.5.1 se concluye entonces:

- $\mathsf{fv}(\lambda^a x.A_1) \uparrow L$
- $\mathsf{fv}(B) \uparrow L$

Por lo tanto, contrayendo el redex de (A.7) se obtiene:

$$@(A^a, B) \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell {A_1}^{\{-a\}}\{x := B\} \tag{A.8}$$

Sólo resta verificar las dos afirmaciones siguientes:

1. $A_1 \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.x$ y $B \overset{L,m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{b}^m} \overline{y}^m.B'$ implica:
   ${A_1}^{\{-a\}}\{x := B\} \overset{L,n+m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.\lambda^{\overline{b}^m} \overline{y}^m.B'$
2. $A_1 \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.A''$ y $B \overset{L,0}{\rightsquigarrow} B'$ implica:
   ${A_1}^{\{-a\}}\{x := B\} \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n} \overline{x}^n.A''^{\{-a\}}\{x := B'\}$

que se demuestran a continuación. Observar en ambos casos que $a \notin \mathsf{fl}(B)$.

1. Por inducción en n:
   - Caso $n = 0$: se tiene $A_1 \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell x$. Por el Lema 3.5.5 y el Lema 3.5.6, ${A_1}^{\{-a\}}\{x := B\} \overset{L,0}{\twoheadrightarrow}_\ell B$. La propiedad se concluye por el Lema 4.4.5.

- Caso $n+1$: se tiene que $A_1 \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell \lambda^c z.A'_1$ y $A'_1 \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.x$. Por Lema 4.4.4, usando la h.i., se obtiene:
$$A'^{\{-a\}}_1\{x := B\} \overset{L,n+m}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.\lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.B'$$
Por lo tanto, por definición de reducción en cadena:
$$\lambda^c z.A'^{\{-a\}}_1\{x := B\} \overset{L,n+m+1}{\rightsquigarrow} \lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.\lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.B'$$
En cada paso es necesario usar el hecho de que la etiqueta a es distinta de las etiquetas $c, a_1, \ldots, a_n$.

2. Por inducción en n:

- Caso $n = 0$: se tiene $A_1 \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell A'_1$. La propiedad es consecuencia directa del Lema 3.5.5 y el Lema 3.5.6.
- Caso $n+1$: se tiene que $A_1 \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell \lambda^c z.A'_1$ y $A'_1 \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A''_1$. Por Lema 4.4.4, usando la h.i., se obtiene:
$$A'^{\{-a\}}_1\{x := B\} \overset{L,n}{\rightsquigarrow} \lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A''^{\{-a\}}_1\{x := B'\}$$
Por lo tanto, por definición:
$$\lambda^c z.A'^{\{-a\}}_1\{x := B\} \overset{L,n+1}{\rightsquigarrow} \lambda^c z.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A''^{\{-a\}}_1\{x := B'\}$$
También en este caso es necesario utilizar que la etiqueta a es distinta de las etiquetas $c, a_1, \ldots, a_n$.

□

Corolario 4.4.11. La reducción etiquetada y su presentación simultánea se relacionan de la siguiente manera:

1. Si $A \overset{L}{\to}_\ell B$, entonces $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell B$.
2. Si $A \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell B$ y A es un término $(L, 0)$-etiquetado, entonces $A \overset{L}{\twoheadrightarrow}_\ell B$.

Demostración. Se trata cada inclusión separadamente:

1. Asumir que $A \overset{L}{\to}_\ell B$. Por inducción en A:

- Si $A = \lambda^a x.A' \overset{L}{\to}_\ell B$, entonces $B = \lambda^a x.B'$ con $A' \overset{x\cdot L}{\to}_\ell B'$ por Lema 3.5.4.
Por h.i., $A' \overset{x\cdot L,0}{\Rightarrow}_\ell B'$. Por la regla LAbs1, $\lambda^a x.A' \overset{L,0}{\Rightarrow}_\ell \lambda^a x.B'$.

- Si $A = @(A_1{}^a, A_2)$ y la reducción es interna en A_1, se tiene $A_1 \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} A_1'$ por h.i. Además, $A_2 \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} A_2$ por reflexividad de $\overset{L,0}{\Rightarrow_\ell}$ (Propiedad 4.2.2). Aplicando la regla LApp1 se concluye $@(A_1{}^a, A_2) \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} @(A_1'{}^a, A_2)$.
- Si la reducción es interna en A_2, es análogo al caso anterior.
- Si A es una aplicación y la reducción es en la raíz, $A_1 = \lambda^a x.A_1'$. Se tiene que $A_1' \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} A_1'$ y $A_2 \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} A_2$ por reflexividad de la relación. Por lo tanto $A_1 \overset{L,1}{\Rightarrow_\ell} A_1$ aplicando la regla LAbs2. Además, $\mathsf{fv}(@(A_1{}^a, A_2)) \uparrow L$.

  Se deduce entonces $@(A_1{}^a, A_2) \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} A_1'^{\{-a\}}\{x := A_2\}$ usando la regla LApp2.

2. Asumir que $A \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} B$, con A $(L,0)$-etiquetado. De la Proposición 4.4.10, se tiene $A \overset{L,0}{\rightsquigarrow} B$. Por la definición de reducción en cadena (Definición 4.4.2), esto implica $A \overset{L}{\twoheadrightarrow_\ell} B$.

□

Corolario 4.4.12. Si A es un término $(L,0)$-etiquetado y $A \overset{L}{\rightarrow_\ell} B$, entonces B es un término $(L,0)$-etiquetado.

Demostración. Si $A \overset{L}{\rightarrow_\ell} B$ entonces $A \overset{L,0}{\Rightarrow_\ell} B$ por el Corolario 4.4.11 y por el Lema 4.3.3 se concluye que B es $(L,0)$-etiquetado. □

A.7. De reducción etiquetada a reducción simultánea

Lema 4.5.5. Si $A^*_{L,k}$ existe, entonces es de la forma $\lambda^{\overline{a}^k}\overline{x}^k.B$ donde B está en $\overset{L}{\rightarrow_\ell}$-forma normal.

Demostración. Por inducción en A. El caso no trivial es cuando A es una aplicación.

Si $A = @(A_1{}^a, A_2)$ es (L,k)-aplicable, entonces existen n, m tales que $n + m = k$ y además:

- ${A_1}^*_{L,n+1} = \lambda^a x.A_1' = \lambda^a x.\lambda^{\overline{a}^n}\overline{x}^n.A_1''$ con A_1'' en $\overset{L}{\rightarrow_\ell}$-forma normal.
- $A_2 \overset{L,m}{\Rightarrow_\ell} A_2' = \lambda^{\overline{b}^m}\overline{y}^m.A_2''$ con A_2'' en $\overset{L}{\rightarrow_\ell}$-forma normal.
- $\mathsf{fv}(@(\lambda^a x.A_1'{}^a, A_2')) \uparrow L$.
- Si $m > 0$, entonces $A_1'' = x$.

Entonces:

- Si $m > 0$, se tiene que $A^*_{L,k} = \lambda^{\overline{c}^n}\overline{x}^n.\lambda^{\overline{b}^m}\overline{x}^m.A_2''$. En este caso es trivial, pues A_2'' estaba en $\overset{L}{\rightarrow_\ell}$-forma normal por h.i. Notar que no se asume que las etiquetas de las abstracciones de A_1' son distintas de a. Es por eso que están etiquetadas con c_i, donde $c_i = a_i\{a := \star\}$.

- Si $m = 0$, entonces $A^*_{L,k} = \lambda^{\overline{c}^k}\overline{x}^k.A_1''^{\{-a\}}\{x := A_2'\}$. En este caso, habría que ver que en $A_1''^{\{-a\}}\{x := A_2'\}$ no haya $\xrightarrow{L}_\ell$-redexes. Dado que no los hay en A_1'' ni en A_2', se puede ver por inducción en A_1'' que no puede haber redexes en $A_1''^{\{-a\}}\{x := A_2'\}$. El motivo es que las etiquetas en las abstracciones de A_2' no pueden pasar a encontrarse ligadas por las aplicaciones de A_1' y por lo tanto no puede crearse un redex por el Caso III de la Proposición 2.3.8.

Si A no es (L, k)-aplicable, entonces $k = 0$ y esto implica $n = 0$ y $m = 0$. Por h.i., ${A_1}^*_{L,0}$ y ${A_2}^*_{L,0}$ no tienen $\xrightarrow{L}_\ell$-redexes. Dado que $m = 0$, para que A no sea (L, k)-aplicable debe ocurrir o bien que ${A_1}^*_{L,1}$ no tenga la forma $\lambda^a x.A_1'$, o bien que $\mathsf{fv}(@(\lambda^a x.{A_1'}^a, A_2')) \not\uparrow L$. En cualquiera de los dos casos, es claro que $@({A_1}^{*\,a}_{L,0}, {A_2}^*_{L,0})$ no puede tener un $\xrightarrow{L}_\ell$-redex en la raíz, y por lo tanto debe estar en $\xrightarrow{L}_\ell$-forma normal. $\square$

Bibliografía

[Acz78] Peter Aczel. A general Church-Rosser theorem. Technical report, University of Manchester, 1978.

[Bar71] Henk Barendregt. Some extensional term models for combinatory logics and λ-calculi. Technical report, 1971.

[Bar84] Henk Barendregt. *The Lambda-Calculus: Its Syntax and Semantics*, volume 103 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1984.

[BB10] Eduardo Bonelli and Pablo Barenbaum. Superdevelopments for weak reduction. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 15(2):20–31, 2010.

[BLM05] Tomasz Blanc, Jean-Jacques Lévy, and Luc Maranget. Sharing in the weak lambda-calculus. In Aart Middeldorp, Vincent van Oostrom, Femke van Raamsdonk, and Roel C. de Vrijer, editors, *Processes, Terms and Cycles*, volume 3838 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 70–87. Springer, 2005.

[CF58] Haskell B. Curry and Robert Feys. *Combinatory Logic Volume 1*. North Holland, 1958.

[cH98] Naim Çağman and J. Roger Hindley. Combinatory weak reduction in lambda calculus. *Theor. Comput. Sci.*, 198(1-2):239–247, 1998.

[CH06] Felice Cardone and J. Roger Hindley. J.r.: History of lambda-calculus and combinatory logic. In *Handbook of the History of Logic, volume 5: Logic*, 2006.

[CR36] Alonzo Church and J. Barkley Rosser. Some properties of conversion. *Transactions of the American Mathematical Society*, 39(3):472–482, 1936.

[dMS98] Oege de Moor and Ganesh Sittampalam. Generic program transformation. In *Advanced Functional Programming*, pages 116–149, 1998.

[dMS01] Oege de Moor and Ganesh Sittampalam. Higher-order matching for program transformation. *Theor. Comput. Sci.*, 269(1-2):135–162, 2001.

[dV85] Roel C. de Vrijer. A direct proof of the finite developments theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 50(2):339–343, 1985.

[Fau06] Germain Faure. Matching modulo superdevelopments application to second-order matching. In Miki Hermann and Andrei Voronkov, editors, *LPAR*, volume 4246 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 60–74. Springer, 2006.

[Hin69] J. Roger Hindley. An abstract form of the Church-Rosser Theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 39(1):545–560, 1969.

[HL91] Gérard Huet and Jean-Jacques Lévy. Computations in orthogonal rewriting systems ii. In *Computational Logic: Essays in Honor of Alan Robinson*, pages 415–443. MIT Press, 1991.

[HLS72] J. Roger Hindley, Bruce Lercher, and Jonathan P. Seldin. *Introduction to Combinatory Logic*. Cambridge University Press, 1972.

[How70] William Howard. Assignment of ordinals to terms for primtive recursive functionals of finite type. In A. Kino, J. Myhill, and R.E. Vesley, editors, *Intuitionism and proof theory*, pages 442–478. North-Holland, 1970. Proc. Of Conference in Buffalo, USA, 1968.

[Hue94] Gerard Huet. Residual theory in λ-calculus: A formal development. *Journal of Functional Programming*, 4:371–394, 1994.

[KG] Zurab Khasidashvili and John Glauert. Relating conflict-free stable transition systems and event models via redex families. *Theoretical Computer Science*, (286):2002.

[L´78] Jean-Jacques Lévy. *Réductions correctes et optimales dans le lambda-calcul*. PhD thesis, Paris VII, 1978.

[LM99] Jean-Jacques Lévy and Luc Maranget. Explicit substitutions and programming languages. In C. Pandu Rangan, Venkatesh Raman, and Ramaswamy Ramanujam, editors, *FSTTCS*, volume 1738 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 181–200. Springer, 1999.

[Mel02] Paul-André Melliès. Axiomatic rewriting theory VI: residual theory revisited. In *Rewriting Techniques and Applications – RTA'02*, pages 24–50. Springer, 2002.

[ML71] Per Martin-Löf. A theory of types. Technical report, University of Stockholm, 1971.

[MN98] Richard Mayr and Tobias Nipkow. Higher-order rewrite systems and their confluence. *Theoretical Computer Science*, 192:3–29, 1998.

[New42] Maxwell H. A. Newman. On theories with a combinatorial definition of "equivalence". *Annals of Mathematics*, 43(2):223–243, 1942.

[Ros84] J. Barkley Rosser. Highlights of the history of the lambda-calculus. *Annals of the History of Computing*, 6:337–349, 1984.

[Sch65] David E. Schroer. *The Church-Rosser Theorem.* PhD thesis, 1965.

[SdM01] Ganesh Sittampalam and Oege de Moor. Higher-order pattern matching for automatically applying fusion transformations. In Olivier Danvy and Andrzej Filinski, editors, *PADO*, volume 2053 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 218–237. Springer, 2001.

[Ste72] Sören Stenlund. *Combinators, λ-terms and Proof Theory*. Number 42 in Synthese library. Springer, 1972.

[Sti09] Colin Stirling. Decidability of higher-order matching. *Logical Methods in Computer Science*, 5(3):1–52, 2009.

[Tak89] Masako Takahashi. Parallel reductions in λ-calculus. *J. Symb. Comput.*, 7(2):113–123, 1989.

[vR93] Femke van Raamsdonk. Confluence and superdevelopments. In Claude Kirchner, editor, *RTA*, volume 690 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 168–182. Springer, 1993.

[vR96] Femke van Raamsdonk. *Confluence and Normalisation for Higher-Order Rewriting*. PhD thesis, Vrije Universiteit te Amsterdam, 1996.