Práctica 8
Las clases de complejidad P y NP

Cuando en esta guía de ejercicios hablamos de *fórmulas* nos referimos a fórmulas de la lógica proposicional, con conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Una *asignación de variables* v se representa como una lista finita $[x_1, \ldots, x_n]$ de las variables que toman valor verdadero.

Ejercicio 1. Demostrar que el siguiente lenguaje está en la clase P:

$$\{\langle \ell, n\rangle \mid \ell \text{ es una lista de números y } n \text{ es el mínimo número de la lista}\}$$

¿Está en la clase NP?

Ejercicio 2. Demostrar que los siguientes lenguajes están en la clase P:

1. $\{\langle G\rangle \mid G$ es un grafo no dirigido que tiene al menos una clique de tamaño $2\}$
2. $\{\langle G\rangle \mid G$ es un grafo no dirigido que tiene al menos una clique de tamaño $3\}$
3. En general, si $k \in \mathbb{N}$, $\{\langle G\rangle \mid G$ es un grafo no dirigido que tiene al menos una clique de tamaño $k\}$

Ejercicio 3. Demostrar que el siguiente lenguaje está en la clase P:

$$\{\langle \varphi, v\rangle \mid \varphi \text{ es una fórmula y } v \text{ es una asignación de variables que la hace falsa}\}$$

Ejercicio 4. Demostrar que si $A, B \in \mathsf{P}$ entonces:

1. $A \cap B \in \mathsf{P}$
2. $A \cup B \in \mathsf{P}$
3. $A \setminus B \in \mathsf{P}$

Ejercicio 5. Demostrar que el siguiente lenguaje está en la clase NP:

$$\{\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula tal que existe una asignación de variables que la hace falsa}\}$$

Dar dos demostraciones: construyendo un verificador polinomial y construyendo una máquina de Turing no determinística que lo decida.

Ejercicio 6. Demostrar que el siguiente lenguaje está en la clase NP:

$$\{\langle A\rangle \mid A \text{ es un conjunto finito de números enteros tal que existe un subconjunto } B \subseteq A \text{ que suma } 0\}$$

Dar dos demostraciones: construyendo un verificador polinomial y construyendo una máquina de Turing no determinística que lo decida.

Ejercicio 7. Demostrar que si $A, B \in \mathsf{NP}$ entonces:

1. $A \cap B \in \mathsf{NP}$
2. $A \cup B \in \mathsf{NP}$