Práctica 4
Lenguajes computablemente enumerables

Ejercicio 1.

1. Demostrar que si un lenguaje L y su complemento $\overline{L}$ son computablemente enumerables, entonces L es decidible.
2. Demostrar que existe un lenguaje L computablemente enumerable pero cuyo complemento $\overline{L}$ no es computablemente enumerable.
3. Decidir si es verdadera o falsa y justificar: existe un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ tal que L y $\overline{L}$ **no** son computablemente enumerables.

Ejercicio 2. Demostrar las siguientes propiedades, exhibiendo explícitamente enumeradores:

1. Si L es decidible, L es computablemente enumerable.
2. Si L_1 y L_2 son computablemente enumerables, la unión $L_1 \cup L_2$ es computablemente enumerable.
3. Si L_1 y L_2 son computablemente enumerables, la intersección $L_1 \cap L_2$ es computablemente enumerable.
4. Si L_1 y L_2 son computablemente enumerables, el producto cartesiano $L_1 \times L_2$ es computablemente enumerable.

Ejercicio 3. Sea $L_1, L_2, L_3, \ldots$ una sucesión infinita de lenguajes, todos ellos computablemente enumerables. Demostrar que la unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ no siempre es computablemente enumerable.

Ejercicio 4. Sea E un enumerador con las siguientes características:

- La salida contiene infinitas palabras distintas.
- La salida no contiene palabras repetidas.
- Cada vez que E imprime una palabra, la palabra impresa *no* es más corta que la palabra anterior.

Demostrar que el lenguaje enumerado por E es decidible.

Ejercicio 5. Determinar si los siguientes lenguajes son computablemente enumerables y justificar:

1. $\{\langle M, w \rangle \mid M \text{ es una máquina de Turing que rechaza } w\}$
2. $\{\langle M \rangle \mid M \text{ es una máquina de Turing que acepta alguna palabra}\}$
3. $\{\langle M \rangle \mid M \text{ es una máquina de Turing que acepta todas las palabras}\}$
4. $\{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ y } M_2 \text{ son máquinas de Turing tales que } \mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2) = \Sigma^*\}$
5. $\{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ y } M_2 \text{ son máquinas de Turing tales que } \mathcal{L}(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2) \neq \emptyset\}$

Ejercicio 6. Sea $L_1 \leq_m L_2$. Dado un enumerador E para L_2, construir un enumerador E' para L_1.