Def. • $P = \{ A \subseteq \Sigma^* \mid A$ es decidible por una M.T. en tiempo polinomial$\}$.

• $NP = \{ A \subseteq \Sigma^* \mid A$ es decidible por una M.T.N. en tiempo polinomial$\}$

• Dados dos lenguajes $A, B \subseteq \Sigma^*$

$$A \leq_p B \overset{DEF}{\iff} \exists f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* \text{ computable en tiempo polinomial}$$
$$\text{tal que } \forall w \in \Sigma^*. \quad w \in A \iff f(w) \in B.$$

• Un lenguaje A es NP-completo si:

1) $A \in NP$
2) $\forall B \in NP. \quad B \leq_p A$.

• Dada una fórmula φ decimos que φ está en 3FNC si φ es de la forma:

$$(\underbrace{a_1}_{\text{literal}} \vee b_1 \vee c_1) \wedge \overbrace{(a_2 \vee b_2 \vee c_2)}^{\text{cláusula}} \wedge \ldots \wedge (a_n \vee b_n \vee c_n)$$

Cada literal es una variable x o una variable negada $\bar{x}$.

• $3SAT = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi$ es una fórmula en 3FNC satisfactible $\}$

Es decir, existe una manera de darle valores booleanos a las variables que hace verdadera a la fórmula.

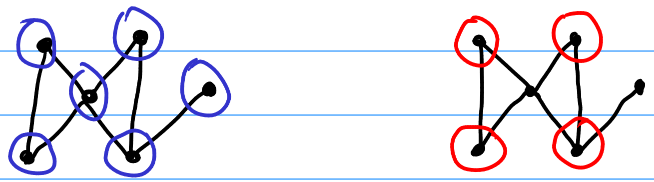
Teorema (Cook-Levin). 3SAT es NP-completo.

- 3SAT es NP.
- Todo problema de la clase NP se reduce polinomialmente a 3SAT.

Problema de cubrimiento por vértices

En un grafo no dirigido, un cubrimiento por vértices es un subconjunto del conjunto de vértices tal que todas las aristas tocan al menos un vértice del conjunto.

Ej.



Este grafo tiene un cubrimiento por 4 vértices.

Def. VERTEX-COVER $= \{ \langle G, k \rangle \mid G$ es un grafo no dirigido que tiene un cubrimiento por k vértices$\}$.

Obs. VERTEX-COVER está en NP.

Teorema. VERTEX-COVER es NP-completo.

Dem.

- Ya mencionamos que VERTEX-COVER es NP.
- Faltaría ver que todo lenguaje NP se reduce polinomialmente a VERTEX-COVER.

- No vamos a demostrarlo por definición,
  Vamos a reducir 3SAT a VERTEX-COVER.

$$\underset{NP}{A} \overset{\checkmark}{\leq_p} \underset{\text{NP-completo}}{3\,SAT} \overset{?}{\leq_p} \text{VERTEX-COVER}$$

- Veamos que $3SAT \leq_p$ VERTEX-COVER.
  Es decir, queremos una función $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ computable en tiempo polinomial tal que

$$\langle \varphi \rangle \in 3SAT \iff f(\langle \varphi \rangle) = \langle G, k \rangle$$
$$\text{tq. } \langle G, k \rangle \in \text{VERTEX-COVER}.$$

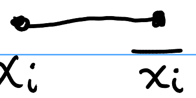
- Es decir, para cada fórmula φ en 3FNC, queremos construir un grafo G y un número k de tal modo que

$$\varphi \text{ es satisfactible} \iff G \text{ tiene un cubrimiento por } k \text{ vértices.}$$

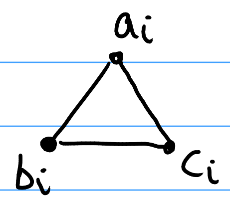
- Supongamos que $\varphi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \dots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$

  es una fórmula que tiene k cláusulas.
  Supongamos que φ involucra ℓ variables $x_1, x_2, \dots, x_\ell$.

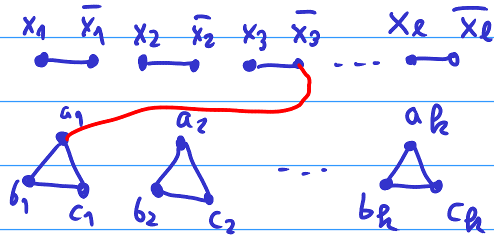
- Construiremos un grafo de $2\ell + 3k$ vértices.
- A cada variable x_i $(1 \leq i \leq \ell)$ le asociamos dos vértices en el grafo, conectados.



- A cada cláusula $(a_i \vee b_i \vee c_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ le asociamos tres vértices en el grafo, conectados:



- Además, conectamos cada vértice de cada cláusula con el vértice de la variable correspondiente.



- Como número de vértices para el cubrimiento elegimos $\ell + 2k$.

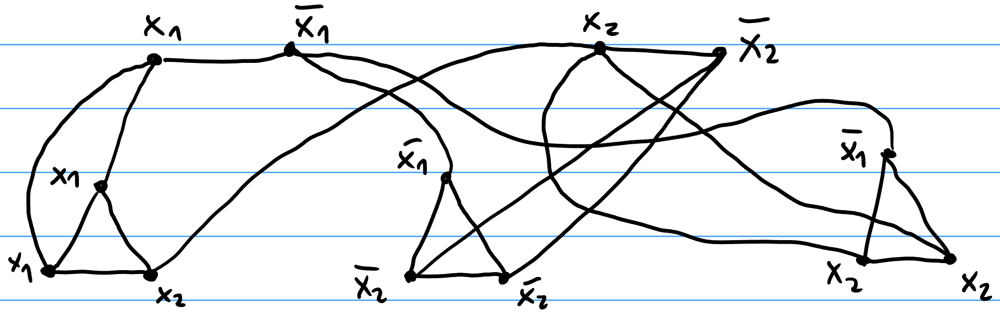
Ejemplo:

Si $\varphi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_2)$

$\ell = 2$ $\quad k = 3$

el grafo que resulta de la construcción de arriba es:

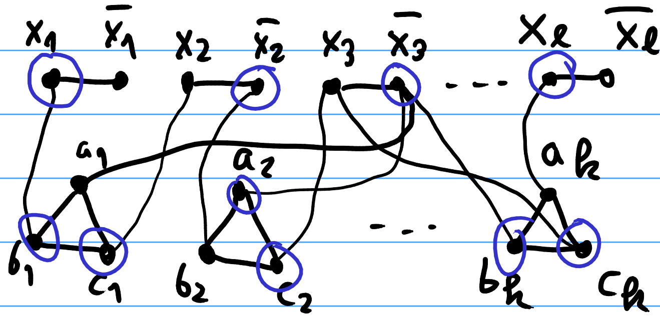
$G =$



$\langle G, \ell + 2k \rangle$

Para terminar, afirmamos que φ es satisfactible si y sólo si el grafo G que resulta de la construcción de arriba tiene un cubrimiento por $\ell + 2k$ vértices.

($\Longrightarrow$) Sup. que φ es satisfactible y veamos que G tiene un cubrimiento por $\ell + 2k$ vértices.



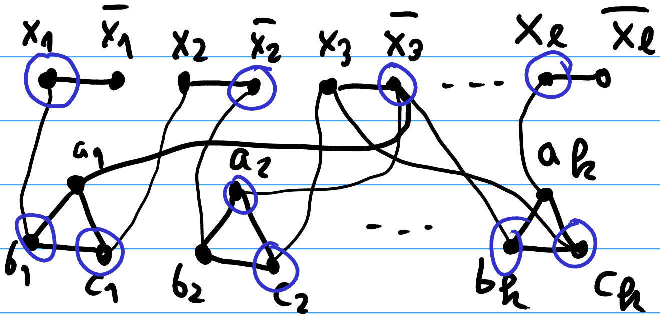
$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$\vdots$
$x_\ell = 1$

- Consideremos una asignación de variables que hace verdadera a la fórmula y seleccionemos para el cubrimiento ℓ vértices, de tal modo que incluimos x_i si $x_i = 1$ e incluimos $\bar{x}_i$ si $x_i = 0$.

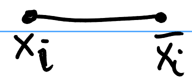
- De cada triángulo, al menos un vértice corresponde a un literal que se hace verdadero. Seleccionamos para el cubrimiento a los otros dos vértices del triángulo. Eso nos da otros $2k$ vértices.

- Esta elección es un cubrimiento por $\ell + 2k$ vértices.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que tenemos un cubrimiento por $\ell + 2k$ vértices.



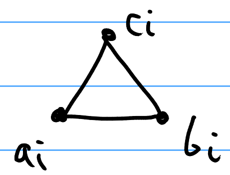
- Como es un cubrimiento, de cada uno de los segmentos



seguro al menos uno de los dos vértices está en el cubrimiento.

- De los $\ell + 2k$ vértices del cubrimiento, al menos ℓ son vértices que corresponden a variables.

- Análogamente, de cada triángulo seguro al menos dos de los tres vértices están en el cubrimiento:



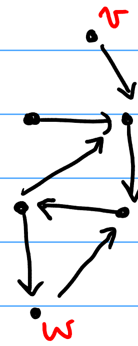
- De los $\ell + 2k$ vértices del cubrimiento, los restantes $2k$ vértices corresponden a literales de una cláusula.

- Tomemos una asignación de variables tal que:

$$x_i := \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } x_i \text{ está en el cubrimiento} \\ 0 & \text{si el vértice } \overline{x_i} \text{ está en el cubrimiento.} \end{cases}$$

- Esa asignación de variables hace verdadera a la fórmula. Por lo tanto φ es satisfactible.

Recordemos que en un grafo dirigido un camino Hamiltoniano desde v hasta w es un camino que empieza en v, termina en w, y pasa por todos los vértices, sin repetir.



Def.

$$HAMPATH = \{\langle G, v, w\rangle \mid G \text{ es un grafo dirigido que tiene un camino Hamiltoniano desde } v \text{ hasta } w\}.$$

Teorema. HAMPATH es NP-completo.

Dem. 1) Recordemos que HAMPATH es NP.

2) Además veamos que $3SAT \leq_p HAMPATH$.

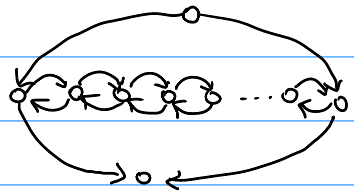
- Es decir, dada una fórmula φ en 3FNC, vamos a querer construir un grafo G, y vértices v w tales que

  φ es satisfactible si y sólo si G tiene un camino Hamiltoniano desde v hasta w.

- Supongamos que $\varphi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \dots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$

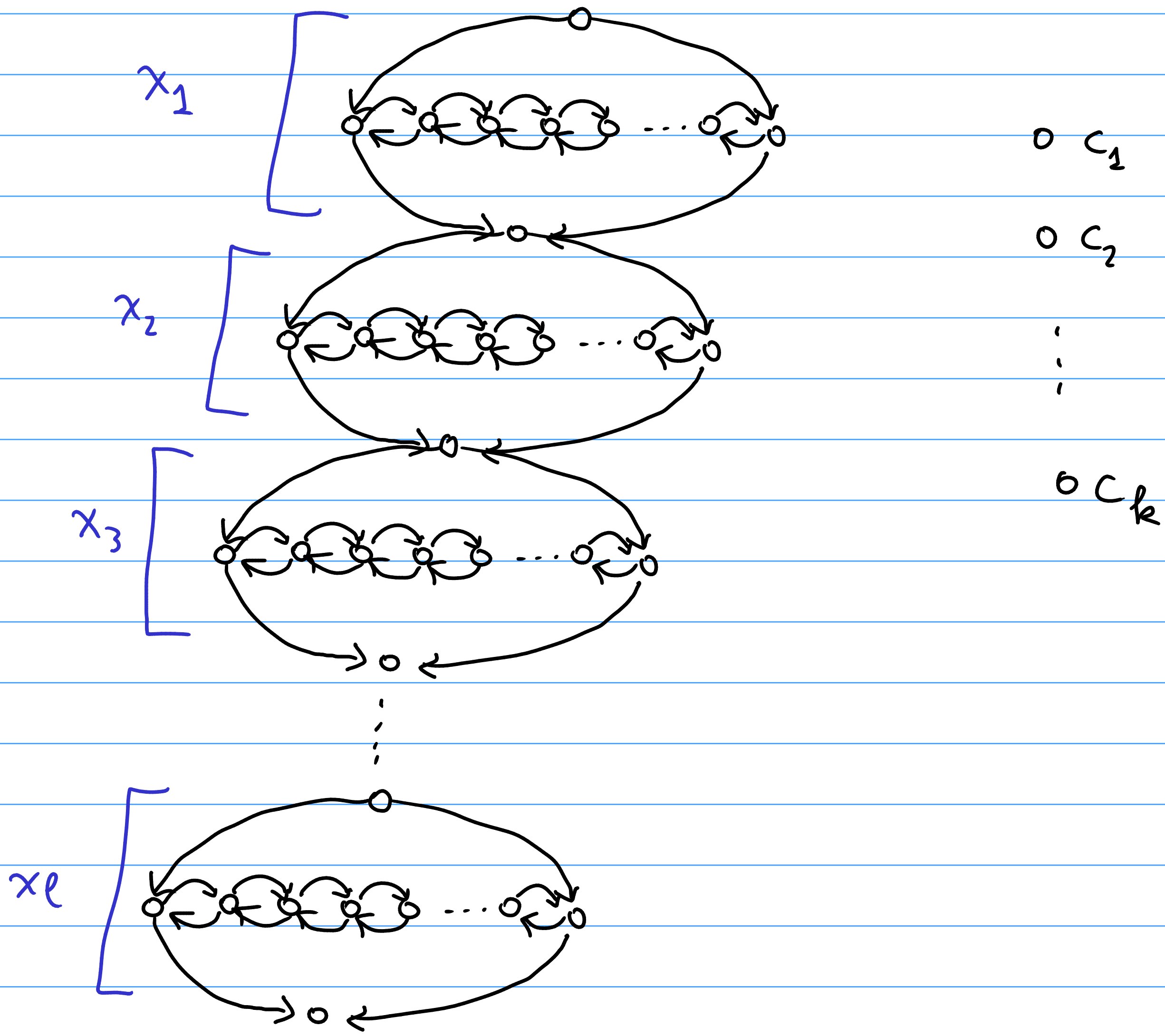
  con k cláusulas y ℓ variables $x_1, x_2, \dots, x_\ell$.

- Para cada variable x_i vamos a construir un "diamante":

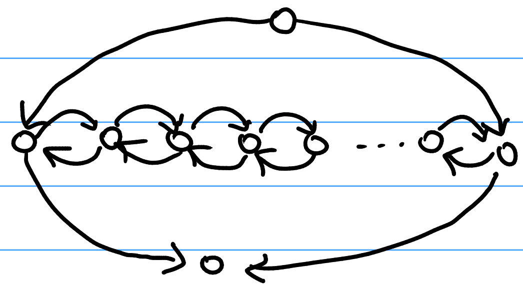


- Además, para cada cláusula vamos a incluir un vértice en el grafo.

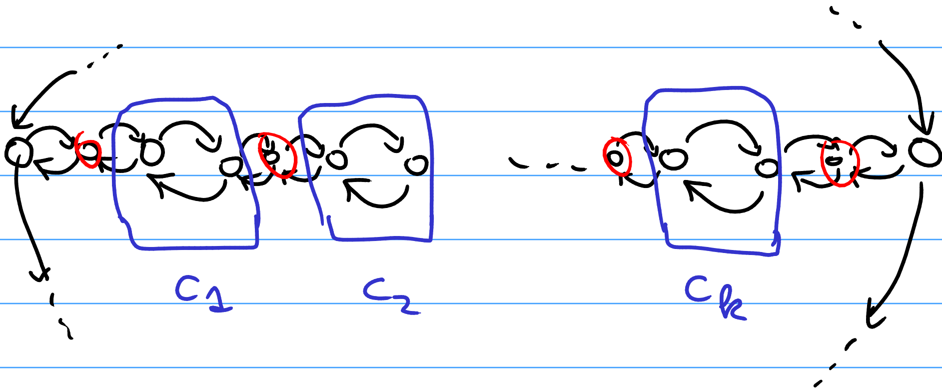
- El aspecto del grafo va a ser:



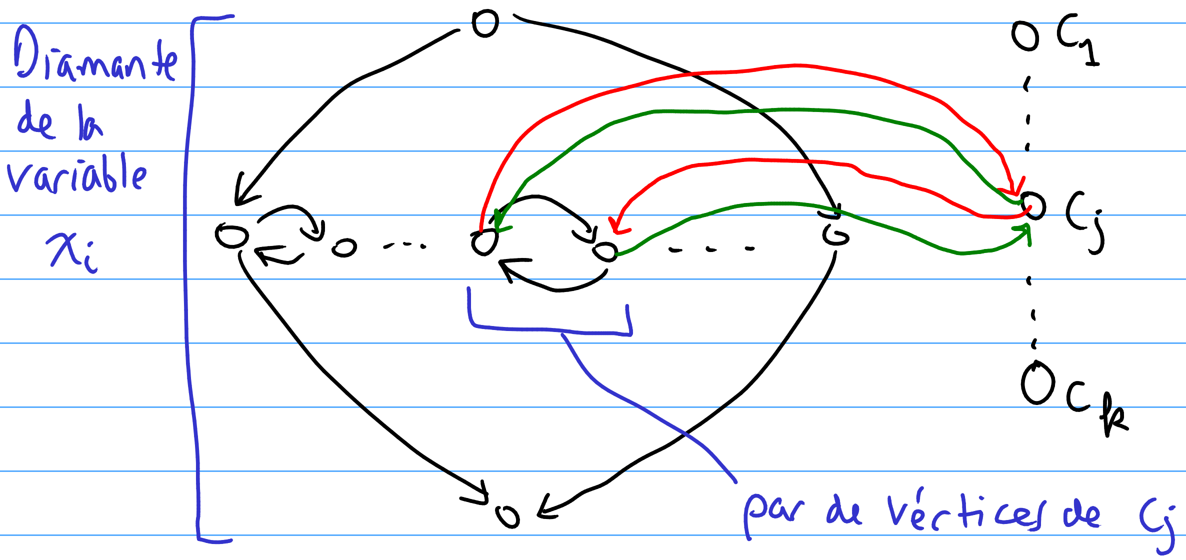
- En el diamante de la variable x_i



- La fila de vértices va a tener $3k+1$ vértices.



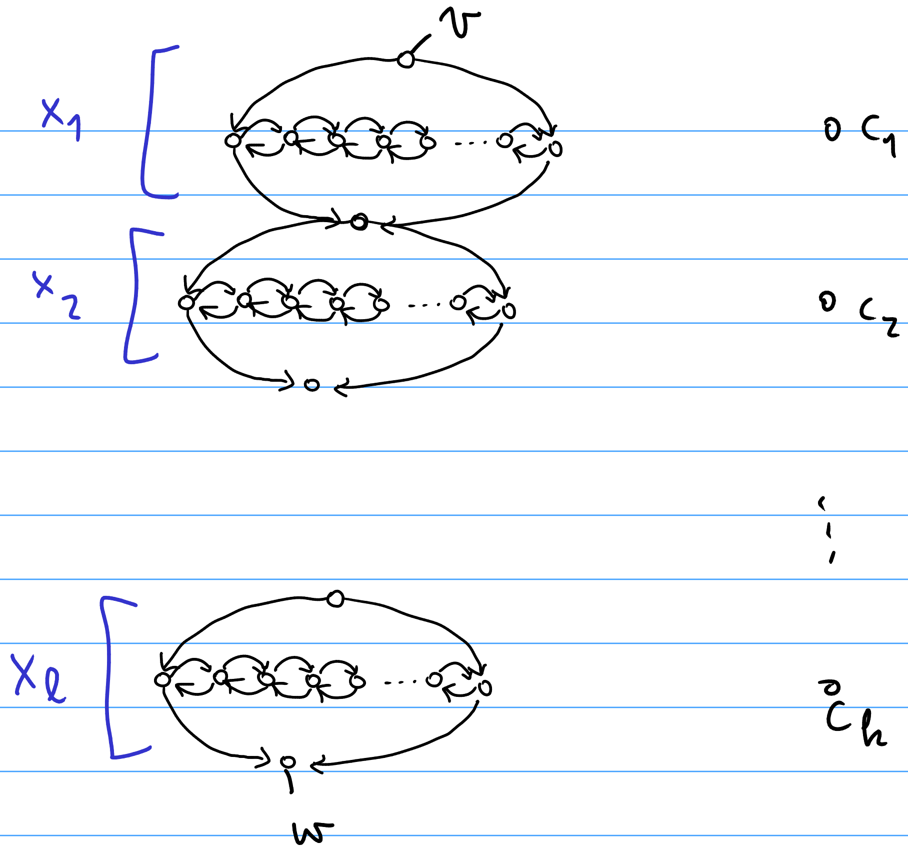
- Además, si la variable x_i aparece en la cláusula C_j:



- Vamos a incluir dos aristas como en el dibujo.

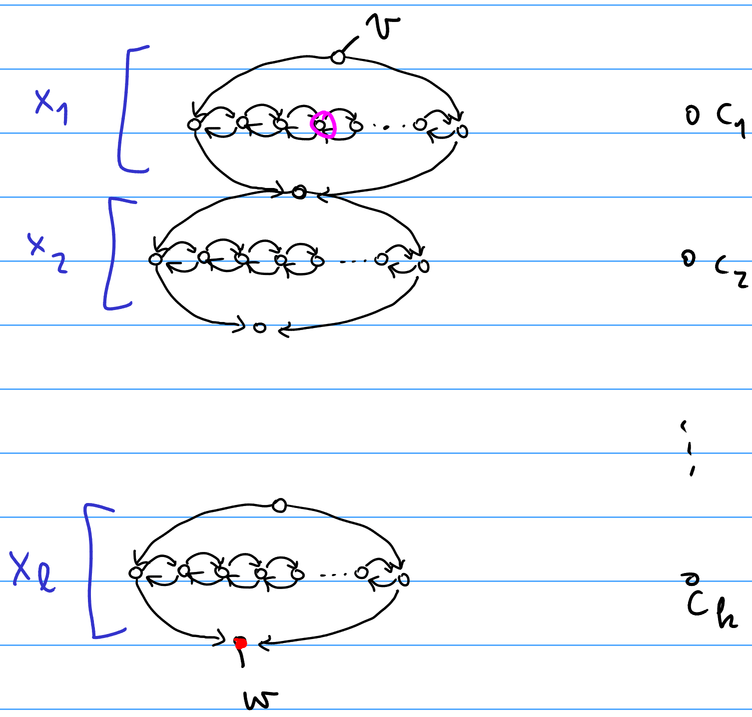
- Si la variable $\overline{x_i}$ aparece en la cláusula C_j,

Vamos a incluir dos aristas como en el diagrama.



<u>Afirmo</u>. La fórmula φ es satisfactible si y sólo si $\langle G, v, w \rangle \in$ HAMPATH.

($\Longrightarrow$) Supongamos que φ es satisfactible.



- Si la variable x_i tiene valor verdadero, cuando entramos al diamante de x_i entramos hacia la izq. y recorremos la fila de izq. a derecha.

- Si la variable x_i tiene valor falso, cuando entramos al diamante de x_i entramos por la derecha, y recorremos la fila de derecha a izq.

- Como la fórmula es satisfactible, elijamos, para cada cláusula, un literal que la haga verdadera.

- Se pueden recorrer todos los vértices del grafo G desde v hasta w sin repetir.

Por lo tanto $\langle G, v, w \rangle \in$ HAMPATH.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que

$$\langle G, v, w \rangle \in \text{HAMPATH},$$

y veamos que φ es satisfactible.

- A la variable x_i le damos valor verdadero si el camino Hamiltoniano recorre su "diamante" de izquierda a derecha, y valor falso en caso contrario.

- Esta asignación de variables hace verdadera a φ.

$$\langle \varphi \rangle \in 3SAT.$$

Def.

$$\text{SUBSET-SUM} = \{ \langle X, t \rangle \mid X \text{ es un } \sout{\text{conjunto}} \text{ multiconjunto de números y hay un subconjunto } Y \subseteq X \text{ que suma } t \}$$

$X = \{1, 2, 2, 2, 3\}$ $\quad\quad$ $\langle X, 7 \rangle \in \text{SUBSET-SUM}$

pues $2+2+2+1 = 7$

Teorema. SUBSET-SUM es NP-Completo.

Dem. 1) SUBSET-SUM es NP. (Ya lo vimos).

2) Vamos a ver que $3SAT \leq_p \text{SUBSET-SUM}$.

- Es decir, dada una fórmula φ podemos construir un multiconjunto X y un número t tales que:

$$\varphi \text{ es satisfactible si y sólo si } \langle X, t \rangle \in \text{SUBSET-SUM}.$$

- Sea $\varphi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \ldots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$

una fórmula en 3 FNC de k cláusulas.

Y supongamos que φ involucra l variables $x_1, x_2, \ldots, x_l$.

El número y_i está asociado al literal x_i.
El número z_i está asociado al literal $\overline{x_i}$.

Por cada variable, incluimos dos números en el multiconjunto X.

Para cada cláusula, incluimos dos números en el multiconjunto X.

	x_1	x_2	....	x_ℓ	C_1	C_2	...	C_k
y_1	1	0	0	0	1	0	1 ...	1
z_1	1	0	0	0	0	1	1 0 ...	0
y_2		1	0	0	1		⋱	
z_2		1	0	0	0			
⋮			...					
y_ℓ			0 ...	1	0			
z_ℓ			0 ...	1	1			
f_1	0	0		0	1	0	... 0 ...	0
g_1	0	0		0	1	0		0
f_2	0	0		0	0	1		0
g_2			⋱		0	1		0
⋮								
f_k					0	0	... 0 ...	1
g_k	0	0		0	0	0	... 0 ...	1
t	1	1	... 1	1	3	3	... 3 ...	3

$$\underbrace{(x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_\ell})}_{C_1}$$

- Si x_i aparece en la cláusula C_j, ponemos dígito 1 al número y_i en la columna de C_j.
- Si $\overline{x_i}$ aparece en la cláusula C_j, ponemos dígito 1 al número z_i en la columna de C_j.

<u>Afirmo</u>: φ es satisfactible si y sólo si

$$\langle X, t \rangle \in \text{SUBSET-SUM}$$

donde $X = \{y_1, z_1, \dots, y_\ell, z_\ell, f_1, g_1, \dots, f_k, g_k\}$

($\Longrightarrow$) Sup. que φ es satisfactible.
Consideremos una asignación de variables que la hace verdadera.

- Si x_i es verdadera, incluimos y_i en Y.

  Si x_i es falsa, incluimos z_i en Y.

- La suma es de la forma

$$\underbrace{1\,1\ldots 1}_{\ell \text{ dígitos}}\ \underbrace{d_1\, d_2 \ldots d_k}_{k \text{ dígitos}}$$

1 1 0 2 2 0 1 1 2 2
2 2 3 1 1 3 2 2 1 1

$$1 \leq d_i \leq 3$$

- Agregando elementos de $\{f_1, g_1, \ldots, f_k, g_k\}$ se puede completar la suma a:

$$t = 1\,1\ldots 1\ 3\,3\ldots 3$$

- Por lo tanto $\langle X, t\rangle \in$ SUBSET-SUM.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\langle X, t\rangle \in$ SUBSET-SUM.

- A la variable x_i le damos valor verdadero si $y_i \in Y$, y falso si no.

- Esa asignación de variables hace verdadera a φ.

- φ es satisfactible.