Alan Turing, 1936.

On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem.

$$\forall n > 2 .\ \nexists x, y, z \in \mathbb{Z} .\ x^n + y^n = z^n$$

$$\pi = 3,14159265\ldots$$

Máquinas de Turing

1) Intuición.
2) Dando ejemplos.
3) Comparar con otros modelos de Cómputo.

Registros: r_0, r_1, r_2, r_3

Cada registro toma un valor entre 0 y 15.

$16^4 \times 3$ estados posibles

65.536×3

0: inc r_1

1: dec r_2

2: jnz r_2

$\boxed{r_0 = 10,\ r_1 = 9,\ r_2 = 1,\ r_3 = 6,\ IP = 1}$

$\downarrow$

$\boxed{r_0 = 10,\ r_1 = 9,\ r_2 = 0,\ r_3 = 6,\ IP = 1}$

Usando un AFD se puede modelar el comportamiento de cualquier programa que use:

- Asignaciones
- Operaciones aritméticas/lógicas
- If
- While
- For

Siempre y cuando el número de registros sea finito, y cada registro toma un número finito de valores.

Si $L \subseteq \Sigma^*$ es un lenguaje
y M es una MT :

Dada $w \in \Sigma^*$

$$M(w) = \begin{cases} \text{acepta} \\ \text{rechaza} \\ \text{no termina} \end{cases}$$

Decimos que:

	M decide L	M semi-decide L (reconoce)
$w \in L$	acepta	acepta
$w \notin L$	rechaza	no acepta (rechaza ó no termina)

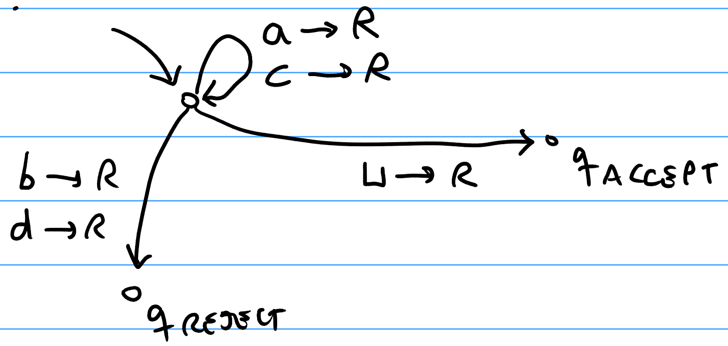
Sobre el tamaño del alfabeto

$$\Sigma = \{a, b, c, d\}$$

$$L = \mathcal{L}((a \mid c)^*)$$

<u>Afirmación</u>: El lenguaje L es decidible.

<u>Dem</u>.

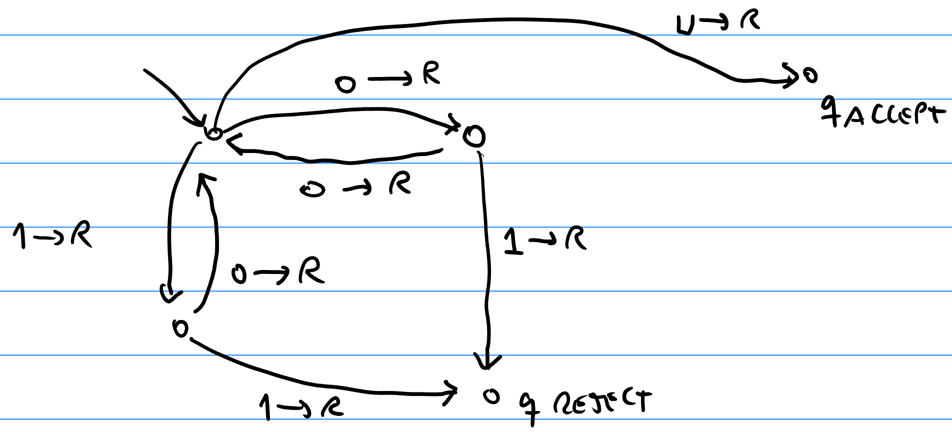


$$\Sigma' = \{0, 1\}$$

Podríamos codificar:

$a \mapsto 00 \quad b \mapsto 01 \quad c \mapsto 10 \quad d \mapsto 11$

$$L' = \mathcal{L}((\underbrace{00}_{a} \mid \underbrace{10}_{c})^*)$$



$\Sigma = \{a, b, c\}$

Def. $\text{Suma} = \{ a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}, \; n + m = k \}$

Ej.: aabbbccccc.

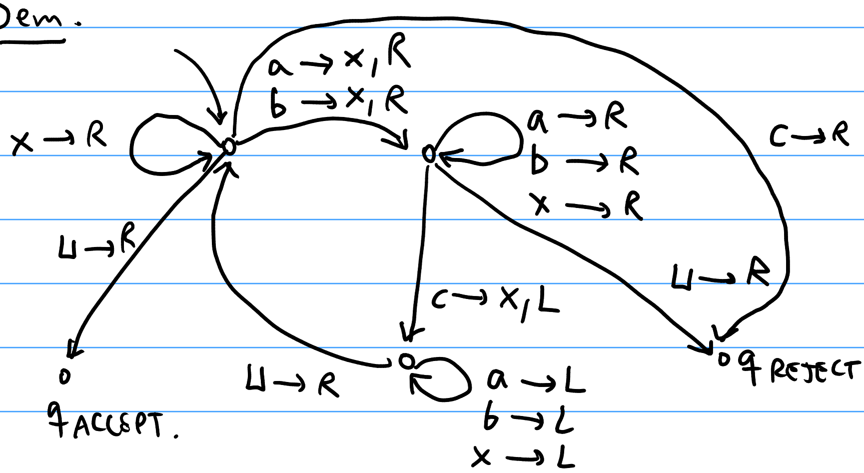
Teorema. Suma es decidible.

Es decir, existe una M.T. M tal que

$$M(w) = \begin{cases} \text{acepta} & \text{si } w \in \text{Suma} \\ \text{rechaza} & \text{si } w \notin \text{Suma.} \end{cases}$$

Dem.

$\Gamma = \{a, b, c, \sqcup, x\}$



Def. $\text{Mult} = \{ a^n b^m c^k \mid n, m, k \in \mathbb{N}, \; n * m = k \}$

Teorema: Mult es decidible.

$\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}bbbb\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}\cancel{c}$

$\Gamma = \{a, b, c, \sqcup, \cancel{a}, \cancel{b}, \cancel{c}\}$

Def. $\text{Primos} = \{ a^p \mid p \in \mathbb{N}, \; p \text{ primo} \}$

Teorema. Primos es decidible.

Def. $\text{DígitosDePi} = \{ a^n b^m \mid$ si $m, n \in \mathbb{N}$ y m es el n-ésimo dígito decimal de $\pi \}$

Ej. $\pi = 3.14159265\ldots$

bbb ab aabbbb

Teorema. DígitosDePi es decidible.

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{ \{ , \} , , , a, b, c, q, 0, 1, 2, \ldots \}$$

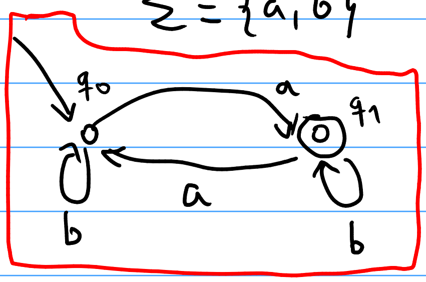
Def. $A_{AFD} = \{ \langle D, w \rangle \mid D \text{ es un AFD}, \; w \in \mathcal{L}(D) \}$

Recordemos que $D = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$.

$q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

Por ejemplo:

$\Sigma = \{a, b\}$

$D =$ 

$\langle D, aaba \rangle =$

$\boxed{(\{a,b\}, \{q_0, q_1\}, \{(q_0,a,q_1), (q_0,b,q_0), (q_1,a,q_0), (q_1,b,q_1)\}, q_0, \{q_1\}), aaba}$ | q_1

$\in A_{AFD}$

Teorema. A_{AFD} es decidible.

Def. $A_{AFN} = \{ \langle N, w \rangle \mid N$ es un AFN, $w \in \mathcal{L}(N) \}$

Teorema. A_{AFN} es decidible.

Dem. **Paso 1**: Convertir el AFN N a un AFD D equivalente.

Paso 2: Ver si $\langle D, w \rangle \in A_{AFD}$.
(Esto ya vimos que era decidible).

Def. $A_{ER} = \{ \langle R, w \rangle \mid R$ es una E.R., $w \in \mathcal{L}(R) \}$.

$(a|b)^*, aaab \in A_{ER}$

$(a|b)^*, acab \notin A_{ER}$

Teo. A_{ER} es decidible.

Dem.

Dada una E.R. R:

Paso 1. Convertir R a un AFN N tal que $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(N)$.

Paso 2: Ver si $\langle N, w \rangle \in A_{AFN}$.
(Esto ya vimos que era decidible).

Def. $E_{AFD} = \{ \langle D \rangle \mid D \text{ AFD t.q. } \mathcal{L}(D) = \emptyset \}$

Teorema. E_{AFD} es decidible.

Dem. Si $D = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$,

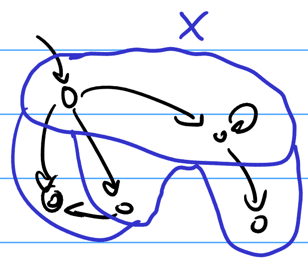
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$X := \{ q_0 \}$

while(hay algún estado $q \in X$ &&
algún símbolo $a \in \Sigma$ &&
$\delta(q, a) \notin X$) {

$X := X \cup \{ \delta(q,a) \}$

}



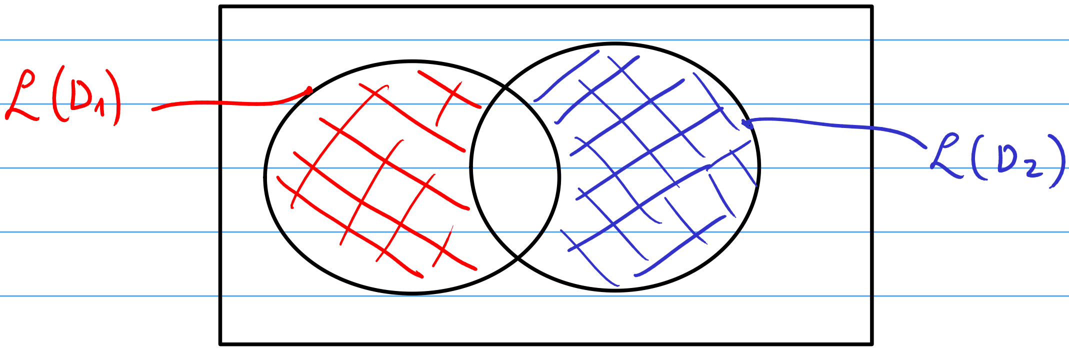
si en X
hay algún estado final {
rechazar
} else {
aceptar
}

Def. $EQ_{AFD} = \{ \langle D_1, D_2 \rangle \mid D_1, D_2$ son AFD, $\mathcal{L}(D_1) = \mathcal{L}(D_2) \}$.

Teorema. EQ_{AFD} es decidible.

Dem. Definimos este lenguaje:

$$L = \big(\mathcal{L}(D_1) \setminus \mathcal{L}(D_2)\big) \cup \big(\mathcal{L}(D_2) \setminus \mathcal{L}(D_1)\big)$$



observación: $\mathcal{L}(D_1) = \mathcal{L}(D_2) \iff L = \emptyset$

Como L es regular, hay un AFD E tal que $\mathcal{L}(E) = L$.

Más aún, el AFD E se puede construir mecánicamente a partir de los autómatas D_1 y D_2.

Por último: $\langle D_1, D_2 \rangle \in EQ_{AFD}$

$\Updownarrow$

$E \in E_{AFD}$

(Esto ya vimos que era decidible).

Def. $A_{MT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M$ es una máquina de Turing, $M(w) = \text{acepta} \}$

El problema de determinar si una cadena $\alpha \in A_{MT}$ se llama el problema de la detención.

Halting problem

L es decidible
$\Downarrow \quad \not\Uparrow$
L es semi-decidible

Teorema. A_{MT} es semi-decidible.

Es decir, existe una M.T. U tal que para toda cadena α

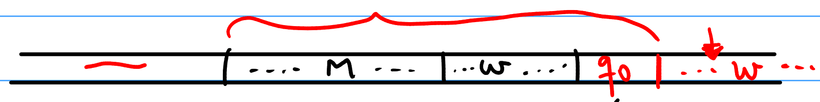
- si $\alpha \in A_{MT}$ entonces $U(\alpha) = \text{acepta}$
- si $\alpha \notin A_{MT}$ entonces $U(\alpha) = \text{rechaza}$ ó no termina

Dem. Construcción de la M.T. "U".

Paso 1. Verificar que la cadena α sea de la forma $\langle M, w \rangle$. (Si no, rechazar).

Paso 2.

Máquina U.



- Simular el comportamiento de la máquina de turing M sobre la cadena w.
- Si $M(w) = \text{acepta}$, entonces U acepta $\langle M, w \rangle$.
- Si $M(w) = \text{rechaza}$, entonces U rechaza $\langle M, w \rangle$.
- ¿Qué pasa si $M(w)$ no termina?
  La máquina U tampoco va a terminar.

Comentario: La máquina U se llama "máquina de Turing universal".

Σ fijo

Teorema Hay lenguajes no semi-decidibles.

Es decir, existe un lenguaje L tal que no existe una M.T. M tal que
$\forall w.\ w \in L \Leftrightarrow M(w) = \text{acepta}$.

(Hay lenguajes no decidibles).

Dem.

- **Observación 1.** $\mathcal{M} = \{ M \mid M \text{ es una máquina de Turing} \}$.
  es numerable, o sea $\mathcal{M} \approx \mathbb{N}$.

Cualquier máquina de Turing
$$M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{ACCEPT}, q_{REJECT}).$$
Se puede escribir codificándola como una cadena finita de símbolos.

- **Observación 2.** Σ^* es numerable, $\Sigma^* \approx \mathbb{N}$.

- **Observación 3.** $\mathcal{L} = \{ L \mid L \subseteq \Sigma^* \} = \mathcal{P}(\Sigma^*)$.
  no es numerable,
  $\mathcal{L} \approx \mathbb{R}$.

Dem.
$$\Sigma^* = \{ w_1, w_2, w_3, \dots \}$$

Supongamos por el absurdo que todos los lenguajes del conjunto $\mathcal{L}$ se pudieran enumerar, es decir que

$$\mathcal{L} = \{ L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}, \dots \}$$

	w_1	w_2	w_3	w_4	$\dots$
$L^{(1)}$	$b_1^{(1)}$	$b_2^{(1)}$	$b_3^{(1)}$	$b_4^{(1)}$	$\dots$
$L^{(2)}$	$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$b_4^{(2)}$	$\dots$
$L^{(3)}$	$b_1^{(3)}$	$b_2^{(3)}$	$b_3^{(3)}$	$b_4^{(3)}$	$\dots$
$L^{(4)}$	$b_1^{(4)}$	$b_2^{(4)}$	$b_3^{(4)}$	$b_4^{(4)}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$

$b_j^{(i)} = \text{true} \Leftrightarrow w_j \in L_i$

Considerar el lenguaje D tal que para cada $i \in \mathbb{N}$
$$w_i \in D \Leftrightarrow b_i^{(i)} = \text{false}.$$
$$w_i \notin L^{(i)}$$

Pregunta: El lenguaje D ¿aparece en la lista?

¿Existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $D = L^{(j)}$?

Si existiera, tendríamos que:

$$\boxed{w_j \in L^{(j)}} \Leftrightarrow b_j^{(j)} = \text{false} \Leftrightarrow \boxed{w_j \notin L^{(j)}}$$

Contradicción.

Por lo tanto no es posible enumerar todos los lenguajes.

$\mathcal{M} \approx \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathcal{L} \not\approx \mathbb{N}$

$$A_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ es una M.T. y } M(w) = \text{acepta}\}.$$

A_{MT} es semi-decidible.

Teorema. A_{MT} no es decidible. (El Halting problem es indecidible).

Es decir no existe una MT "H" tal que

$$\begin{cases} \text{si } \alpha \in A_{MT} \text{ entonces } H(\alpha) = \text{acepta} \\ \text{si } \alpha \notin A_{MT} \text{ entonces } H(\alpha) = \text{rechaza.} \end{cases}$$

Dem. Por el absurdo, supongamos que existe una MT H tal que para toda cadena α

$$H(\alpha) = \begin{cases} \text{acepta} & \text{si } \alpha \in A_{MT} \\ \text{rechaza} & \text{si } \alpha \notin A_{MT}. \end{cases}$$

(Queremos llegar a una contradicción).

Vamos a construir otra máquina de Turing D, que funciona así:

$$D(\langle M\rangle) = \begin{cases} \text{rechaza} & \text{si } H(\langle\langle M\rangle, M\rangle) = \text{acepta} \\ \text{acepta} & \text{si } H(\langle\langle M\rangle, M\rangle) = \text{rechaza} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{rechaza} & \langle\langle M\rangle, M\rangle \in A_{MT} \\ \text{acepta} & \langle\langle M\rangle, M\rangle \notin A_{MT} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{rechaza} & M(\langle M\rangle) = \text{acepta} \\ \text{acepta} & M(\langle M\rangle) = \text{rechaza ó no termina} \end{cases}$$

¿Qué sucede con $D(\langle D\rangle)$?

$$\boxed{D(\langle D\rangle) = \begin{cases} \text{rechaza} & \text{si } D(\langle D\rangle) = \text{acepta} \\ \text{acepta} & \text{si } D(\langle D\rangle) = \text{rechaza ó no termina} \end{cases}}$$

Contradicción.

$A_{MT} = \{ \langle M, w \rangle \mid M$ es una M.T. y $M(w) = \text{acepta} \}$.

Sabemos que:

- A_{MT} es semi-decidible.
- A_{MT} no es decidible.

<u>Observación</u>. Si un lenguaje L es decidible, su complemento $\Sigma^* \setminus L$ también es decidible.

<u>Teorema</u>. Si un lenguaje L es semi-decidible y su complemento $\Sigma^* \setminus L$ es semi-decidible, entonces L es decidible. (y $\Sigma^* \setminus L$ también).

<u>Dem</u>.

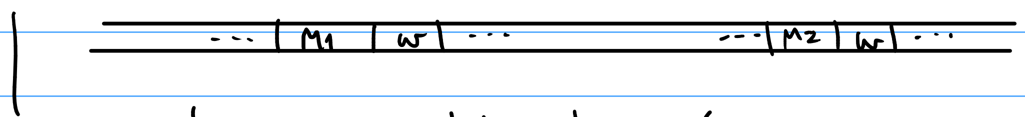
- Como L es decidible, hay una MT M_1 tq:

$$\forall w. \quad w \in L \iff M_1(w) = \text{acepta}.$$

- Como $\Sigma^* \setminus L$ es decidible, hay una MT M_2 tq:

$$\forall w. \quad w \in \Sigma^* \setminus L \iff M_2(w) = \text{acepta}.$$

- Podemos construir una nueva MT M_3:



que simula <u>en paralelo</u> las máquinas M_1 y M_2.

- Si $M_1(w) = \text{acepta}$, $M_3(w) = \text{acepta}$.
- Si $M_2(w) = \text{acepta}$, $M_3(w) = \text{rechaza}$.

M_3 decide el lenguaje L. ✓

Ejemplo de lenguaje que no es semi-decidible:

Considerar el complemento de A_{MT}.

$$L = \Sigma^* \setminus A_{MT}.$$

Sabíamos que A_{MT} era semi-decidible pero no era decidible.

Si su complemento L fuera semi-decidible, por el teorema anterior, A_{MT} sería decidible. (Absurdo).